كلية المستقبل الجامعة
قسم هندسة البناء والإنشاءات
م.م. دعاء أحمد ياسين

المحاضرة السادسة
الكورس الثاني

chapter Five
Integration.

* التكامل هو عبارة عن معكوس المشتقات
وان اذ (y,x) تمثل دوال قابلة للتكامل بالنسبة
الى x وان ثابت (a, b, c) تعتبر ثوابت

* The Integration formulas are:-

① $\int du = u(x) + c$

* تكامل المشتقة يرجع الدالة الى اصلها مع الجمع مع الثابت

② $\int a \cdot u(x)\,dx = a\int u(x)\,dx$

* الثابت يكون خارج التكامل

③ $\int u(x) \mp v(x)\,dx = \int u(x)\,dx \mp \int v(x)\,dx$

يوزع التكامل على جميع الحدود

④ $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$ (when $n \neq -1$)

when $n = -1$

$\int u^{-1} du = \int \frac{1}{u} du = \ln u + c$

⑤ $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c$

⑥ $\int e^u du = e^u + c$

امثلة على التكاملات السابقة

ex) evalute the following integrals

① $\int 3x^2 dx$

Ans

$= 3\int x^2 dx$

$= 3 \frac{x^{2+1}}{2+1} + c$

$= 3 \frac{x^3}{3} + c$

$= x^3 + c$

(2)

② $\int \left(\frac{1}{x^2} + x\right) dx$

$= \int (x^{-2} + x)\, dx$

$= \left(\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right) + \frac{x^2}{2} + c$

$= \frac{x^{-1}}{-1} + \frac{x^2}{2} + c$

$= -\frac{1}{x} + \frac{x^2}{2} + c$

③ $\int x\sqrt{x^2+1}\, dx \Rightarrow \int x(x^2+1)^{\frac{1}{2}} dx$

$= \frac{1}{2}\int 2x(x^2+1)^{\frac{1}{2}} dx$

$= \frac{1}{2} \frac{(x^2+1)^{3/2}}{3/2} + c$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot (x^2+1)^{3/2} + c$

$= \frac{1}{3}(x^2+1)^{3/2} + c$

$= \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3} + c$

③

④ $\int (2t + t^{-1})^2 \, dt$ مربع ذات حدين

$= \int (4t^2 + 4 + t^{-2}) \, dt$

مربع الحد الاول + مربع الحد الثاني + نفس الاشارة * 2 * الاول * الثاني

$= \int (4t^2 + 4 + t^{-2}) \, dx$ موجباً دائماً

$= 4\frac{t^3}{3} + 4t + \frac{t^{-1}}{-1} + c$

$= \frac{4}{3}t^3 + 4t - \frac{1}{t} + c$

⑤ $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+6x}} \, dx$

$\int (x+3)(x^2+6x)^{-\frac{1}{2}} \, dx$

لازم نوفر مشتقة داخل القوس لذلك يجب ان نضرب في 2 ونقسم على $\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}\int (2x+6)(x^2+6x)^{-\frac{1}{2}} \, dx$

$= \frac{1}{2}\frac{(x^2+6x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (x^2+6x)^{\frac{1}{2}}$

$= (x^2+6x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2+6x}$

④

(6) $\int \frac{x+2}{x^2}\,dx$

$\int \left(\frac{x}{x^2} + \frac{2}{x^2}\right) dx$

$\int \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right) dx$

$\int x^{-1} + 2(x^{-2})\,dx$

$\int \left(\frac{1}{x} + 2x^{-2}\right) dx$

$= \ln x + 2\,\frac{x^{-1}}{-1} + c$

$= \ln x - \frac{2}{x} + c$

x^{-1}
لا يجوز تكامل حسب قاعدة الاس +1 تحول الى $\frac{1}{x}$ وتكاملها $\ln x$

(7) $\int \frac{e^x}{1+3e^x}\,dx$

$\int e^x (1+3e^x)^{-1}\,dx$

$\frac{1}{3}\int 3e^x (1+3e^x)^{-1}\,dx$

$= \frac{1}{3}\int (1+3e^x)^{-1}\,dx \rightarrow$ لذلك الاس (-1) نأخذ $\ln$

$= \frac{1}{3}\ln(1+3e^x) + c$

لازم نوفر مشتقة داخل القوس نضرب $\times 3$ ونقسم على $\frac{1}{3}$

⑧ $\int 3x^3 \cdot e^{-2x^4} \, dx$

$-\frac{3}{8} \int 8x^2 \cdot e^{-2x^4} \, dx$

$= -\frac{3}{8}(e^{-2x^4}) + C$

مشتقه (e) هي $h(x)$ دالة مقرونة بـ $e^{h(x)} \cdot h(x)$

في هذا السؤال مشتقه $h(x)$ يوجد بها ثابت يجب أن نوفره وهو 8 لذلك نضرب في $8 \cdot \frac{1}{8}$

* تكامل ⑧ يشبه تكامل ⑨

~~⑨ $\int 3x^3$~~

⑨ $\int 2^{-4x} \cdot dx$

$\int 2^{-4x} \cdot dx$ ⟵ مشتقة الدالة الأسية ذات الأساس (a) إذن يجب توفير المشتقة وهنا يوجد ثابت ناقص وهو $\ln a$ وأيضاً مشتقة $h(x)$

$-\frac{1}{4} \int 4 \cdot 2^{-4x} \cdot dx$

$= -\frac{1}{4} \cdot 2^{-4x} \cdot \frac{1}{\ln 2} + C$

* هنا قسم على $\ln a$ حسب القاعدة الخاصة من قواعد التكامل

م.م. دعاء محمد حسين

25/5/2021.