البرمجة الخطية

Linear Programming

- البرمجة الخطية تعد أسلوبا من الأساليب الكمية، فهي أسلوب تحليلي كمي يتم استخدامه لمساعدة متخذ القرار في تحقيق هدف محدد تعظيم أو تقليل أحد المتغيرات التابعة بإدخال جملة من المتغيرات المستقلة التي تشكل مجموعة من القيود. وتهدف البرمجة الخطية إلى تحليل البدائل المختلفة، لاختيار أفضلها من وجهة نظر المشروع، وذلك على ضوء الهدف المرغوب في تحقيقه مع ألاخذ في الاعتبار القيود المفروضة على المشروع.

عناصر البرمجة الخطية

Linear Programming Elements

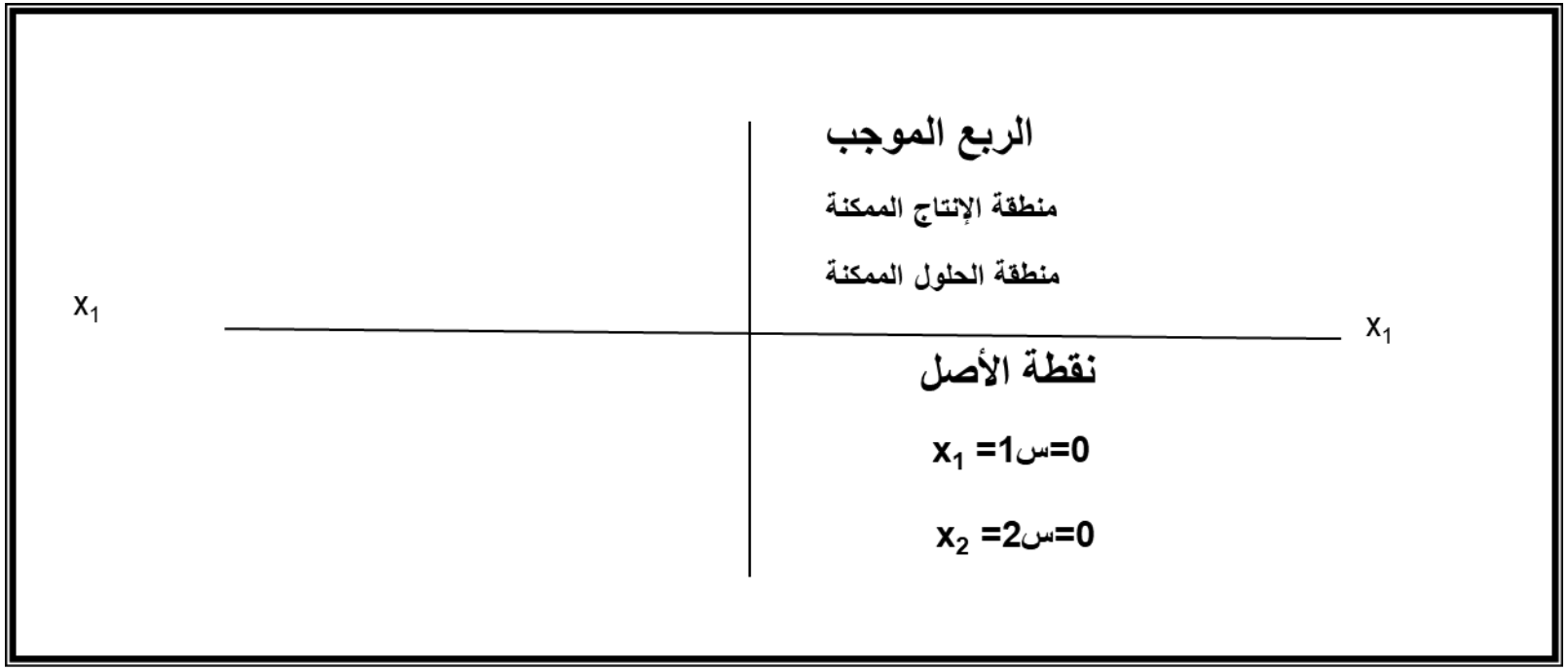
- **دالة الهدف Objective Function** : الهدف في جميع مشاكل البرمجة الخطية يكون اما تحقيق "اقصى" أو "اقل" كمية ما .
- **القيود Constraints:** تتمثل القيود في موارد محدودة يتنافس على استغاللها واستخدامها في مجاالت مختلفة، ويعبر عنها في مشكلة البرمجة الخطية من خالل الكميات المتاحة منها، بمعنى أنه يتم تعظيم أو تدنية المتغيرات الداخلة ضمن دالة الهدف في ظل قيود تتمثل في موارد محدودة، ويعبر عن القيود في شكل معادلات خطية، وهي كما يلي:
  - متساوية =
  - متباينة أكبر من $\leq$
  - متباينة أقل من $\geq$

عناصر البرمجة الخطية

Linear Programming Elements

❑شرط عدم السلبية

أي أن جميع المتغيرات الواقعة في دالة الهدف يجب ان تكون اكبر من او تساوي الصفر $X_j \geq 0$



تعريف البرمجة الخطية بلغة بحوث العمليات

- البرنامج الخطي هو نموذج رياضي يهدف الى تحقيق اقصى Maximum أو ادنى Minimum قيمة لدالة خطية تعرف بأسم دالة الهدف Objective Function . هذه الدالة مقيدة بمعادلات أو متراجحات تسمى قيوداً Constraints بحيث تاخذ دالة الهدف وجميع القيود صيغة العلاقة الرياضية ، أي معادلات أو متراجحات من الدرجة الاولى .

دالة الهدف

تعظيم متغيرات القرار

تقليل متغيرات القرار

قيود	$\leq \geq =$	موارد

متغيرات القرار موجبة أو صفرية " عدم السلبية "

صياغة مشكلة البرمجة الخطية

مشاكل ألمثلية تأتي في شكل نموذج رياضي يعبر عن المشكلة، ويتم إتباع الخطوات التالية في بناء النموذج الرياضي:

- وضع دالة الهدف
- تحديد مجموعة القيود
- احترام شرط عدم السالبية

الصيغة العامة للبرمجة الخطية كالتالي:

$$\text{Min or Max } Z = \sum_{j=1}^{n} Cj\ Xj \qquad (j = 1, 2, \ldots\ldots, n)$$

$$\text{Subject to : } \sum_{j}^{n} aij\ Xj \quad (\leq, =, \geq)\ b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots., m)$$

$$Xj \geq 0$$

الصيغة العامة للبرمجة الخطية كالتالي

$$\text{Min or Max} \quad Z = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \ldots + C_n X_n$$

Subject to :

$$a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + \ldots + a_{1n} X_n \leq , = , \geq b_1$$

$$a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + \ldots + a_{2n} X_n \leq , = , \geq b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1} X_1 + a_{m2} X_2 + \ldots + a_{mn} X_n \leq , = , \geq b_m$$

$$X_1 , X_2 , X_3 , \ldots\ldots\ldots\ldots , X_n \geq 0$$

Z : تمثل قيمة دالة الهدف (تعظيم او تدنية) .

C : معاملات دالة الهدف (ربح او كلفة الوحدة الواحدة ..... الخ) .

X : متغيرات القرار.

a : احتياجات كل وحدة واحدة من الموارد سواء كانت مواد اولية ، الزمن ، عدد العاملين ، ..... الخ .

n : عدد المتغيرات .

m : عدد القيود .

b : الموارد المتاحة .

بناء النموذج الرياضي

النموذج هو صيغة رياضية او شكل مجسم او مصور او مجموعة رموز تمثل مكونات المشكلة المراد حلها، والعلاقة بين اجزائها و العوامل المؤثرة فيها افضل تمثيل بحيث اعطي صورة واضحة ومبسطة للمشكلة.

تعتبر عملية صياغة النموذج من أمتع وأصعب الأعمال التي يقوم بها باحث العمليات، ومع ذلك فإنها تمثل العمود الفقري لهذه الأعمال، فبعد تعريف المشكلة وتصنيفها تأتي الخطوة التالية وهي تمثيل المشكلة على شكل نموذج غالباً ما يكون نموذجاً رياضياً.

انواع المتغيرات

1- المتغيرات القابلة للضبط (السيطرة)

وتسمى أيضاً متغيرات القرار وتتميز هذه المتغيرات بأنها قابلة للمعالجة والتحكم من قبل صانعي القرار.

انواع المتغيرات

2- المتغيرات غير القابلة للضبط

(السيطرة) وهي المتغيرات التي لا يستطيع صناع القرار التحكم بها لأنها خارج نطاق سيطرة المنظمة، كأسعار السلع أو الأسعار المنافسة وقد تتأثر هذه المتغيرات بعوامل داخلية كالموارد المتاحة، وأي صياغة للمشكلة لا تدخل فيها هذه المتغيرات ستقود إلى نتائج خاطئة.

انواع المتغيرات

3- المتغيرات الناتجة حيث تساعد هذه المتغيرات في معرفة المستوى الذي تعمل فيه المنظمة لبلوغ أهدافها وبالتالي تساعد في قياس مستوى فعالية المنظمة وتعتمد هذه المتغيرات على كل من المتغيرات القابلة وغير القابلة للضبط.

أصناف حلول البرمجة الخطية

1- حل ممكن: وهو الحل الذي يلبي احتياجات جميع القيود، أي لا يتعارض مع أي من القيود الفعلية.

2- حل غير ممكن: وهو الحل الذي يلبي احتياجات جزء من القيود، أي يتعارض مع أحد أو أكثر من القيود.

3- حل أمثل: وهو أفضل الحلول الممكنة وقد يوجد للمشكلة حل أمثل وحيد أو عدة حلول مثلى ويقدم تعدد الحلول المثلى مرونة أكبر لصانع القرار عند قيامه بتنفيذ أحدها.

4- حل غير أمثل: هو أي حل ممكن أو غير ممكن لا يتم تصنيفه كحل أمثل.

طرق البرمجة الخطية

1- الطريقة البيانية
Graphical Method

حل نموذج البرمجة الخطة باستخدام الطريقة البيانية

تعد هذه الطريقة وسيلة سهلة لحل مشاكل البرمجة الخطية والتي لا تزيد متغيراتها عن اثنين، وبالرغم من ذلك فإنها تبقى من الطرق المفيدة واللازمة، حيث أن دراستها وفهمها يساعدان في توضيح وفهم بعض المفاهيم.

- تستخدم هذه الطريقة فى حالة وجود متغيرين .
- تتلخص الطريقة فى أننا نقوم برسم القيود على شكل خطوط ثم نوجد منطقة التقاطعات أو المنطقة المشتركة والتى تحتوى على عدة بدائل . وعن طريق إيجاد قيمة دالة الهدف عند هذه البدائل يمكن إختيار البديل أو الحل الأمثل الذى يعظم أو يخفض قيمة دالة الهدف .

خطوات عملية الحل
بالطريقة البيانية

1- رسم المحاور الممثلة لمتغيرات المشكلة وتسميتها، أي المحور الأفقي والمحور العامودي.

2- رسم جميع الخطوط المستقيمة الممثلة لجميع القيود مع تحديد منطقة حل كل قيد.

خطوات عملية الحل
بالطريقة البيانية

3- تحديد المنطقة التي تمثل منطقة حل جميع القيود وتسمى منطقة الحل الكلية أو منطقة الحل الممكن.

4- تحديد حدود منطقة الحل الكلية عن طريق تعيين النقاط الطرفية لمنطقة الحل الممكن.

خطوات عملية الحل
بالطريقة البيانية

5- إيجاد احداثيات كل نقطة من النقاط الطرفية المحيطة بمنطقة الحل الكلية أي تحديد قيم X1 و X2 عند كل نقطة (X1,X2).

6- تحديد قيمة Z التي تمثل قيمة دالة الهدف عند كل نقطة من النقاط الطرفية عن طريق تعويض احداثيات النقطة الطرفية في دالة الهدف.

خطوات عملية الحل
بالطريقة البيانية

7- نحدد نقطة الحل الأمثل وهي النقطة التي قيمة (Z) عندها أكبر ما يمكن في حال كانت دالة الهدف تعظيم أو النقطة التي قيمة (Z) عندها أقل ما يمكن في حال كانت دالة الهدف تخفيض.

Example 1

تقوم شركة أثاث بتصنيع عدة منتجات من الأخشاب، يتمثل أهمها في الكراسي والطاولات، حيث يبلغ ثمن الكرسي الواحد في السوق $10 ،ويحتاج إلى ساعة عمل واحدة في قسم النشر، وساعة عمل واحدة في قسم التجميع، بينما يبلغ ثمن الطاولة $40 ، وتحتاج إلى ساعتين عمل في قسم النشر، وخمسة ساعات عمل في قسم التجميع ، وفي اللحظة التي يستوعب فيها السوق جميع المنتجات من كلا المنتجين، لا يستطيع مدير الشركة الحصول شهريا على أكثر من مائة ساعة عمل في قسم النشر، كما لا يستطيع الحصول على أكثر من مائة وخمسين ساعة عمل في قسم التجميع.

وفي هذه الحالة يحتاج مدير الشركة إلى أن يحدد مزيج الإنتاج من الكراسي والطاولات الذي يحقق لمؤسسته **أعلى عائد**

الحل باستخدام الطريقة البيانية

نتبع الخطوات التالية في صياغة المشكلة

أولا	الهدف	الهدف هنا هو تعظيم العائد.
ثانيا	المتغيرات	كراسي ، طاولات.
ثالثا	الرموز	نعبر عن الكراسي(X_1)، ونعبر عن الطاولات ب(X_2).
رابعا	الجدول	حتى يسهل تكوين المعادلات الرياضية توضع البيانات الموضحة في المشكلة في صورة مصفوفة كما يلي:

الحل باستخدام الطريقة البيانية

جدول يبين بيانات المشكلة

	X_1 كراسي	X_2 طاولات	الموارد المتاحة/ شهريا أقل من أو مساوية
قسم النشر	1	2	100ساعة عمل
قسم التجميع	1	5	150 ساعة عمل
سعر البيع	$10	$40	

الحل باستخدام الطريقة البيانية

وضع البيانات في الجدول أعلاه في صورة معادلات كما يلي

Objective function	Max z=\$10X_1+\$40X_2	دالة الهدف
constraints	$1X_1+2X_2 \leq 100$ $1X_1+5X_2 \leq 150$	القيود
Non negative	$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$	عدم السلبية

- 1- تكوين الاحداث السيني والاحداث الصادي (x_1-x_2)
- 2- رسم مستقيمات القيود كما يلي :
- أ-تحويل القيود الى متساويات وذلك كما يلي:
- المستقيم الأول $x_1+2x_2=100$
- المستقيم الثاني $x_1+5x_2=150$

ب- تحديد نقطتين لكل مستقيم حتى يمكن رسمه وذلك بمعرفة قيم الاحداثين كما يلي

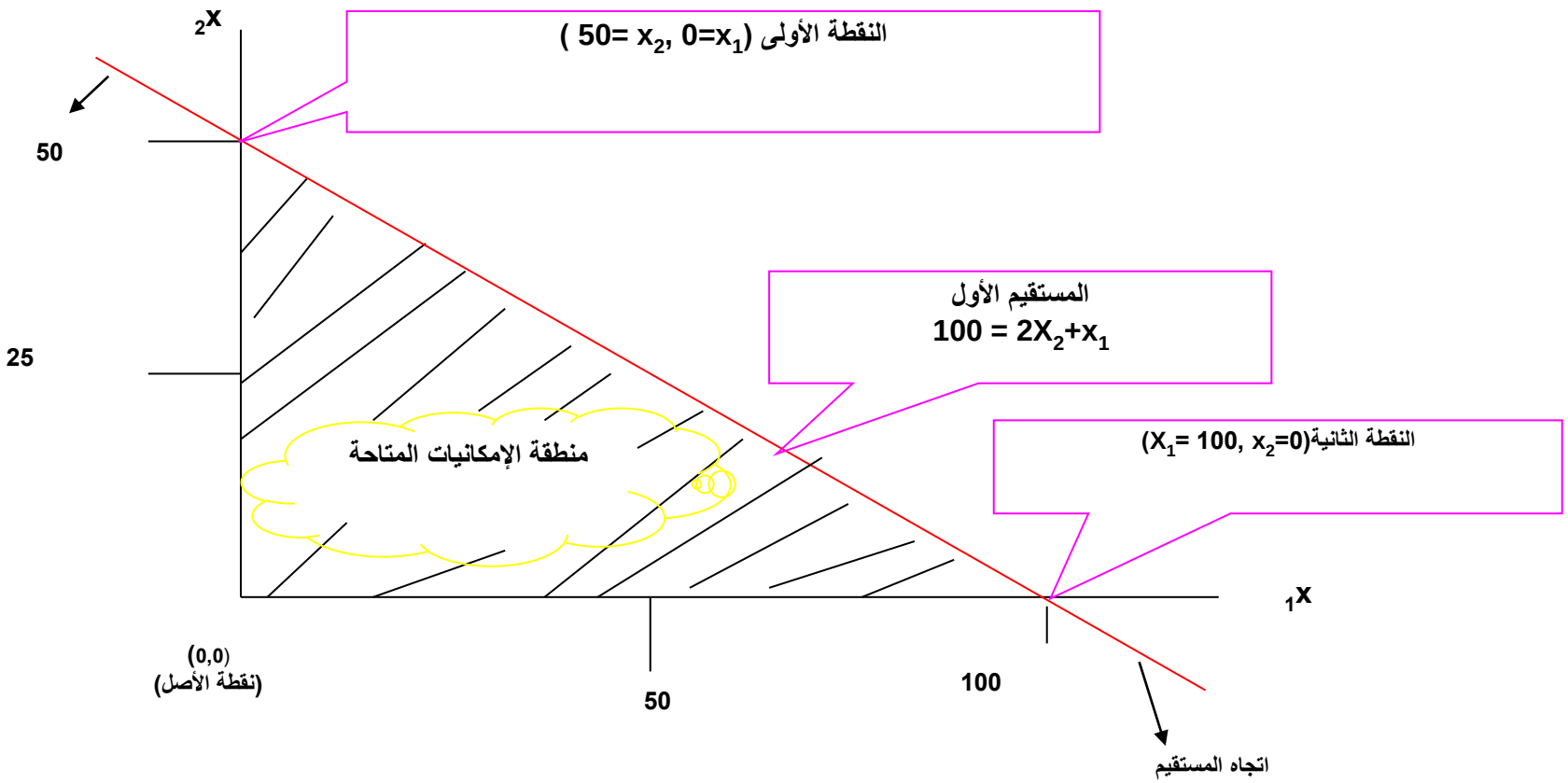
المستقيم الأول	
X_2	X_1
50	0
0	100

وتوضيحا لما تعنيه هذه الأرقام ، افترض ما يلي:

لو فرضنا أن المنتج ركز على إنتاج الطاولات (X_2) ، وأهمل الكراسي(X_1) ، فإنه يستطيع إنتاج 50 طاولة من ساعات الآلة المتوفرة لديه (بفرض أن القيد الأول يعبر عن ساعات العمل لآلة).

بينما إذا ركز الإنتاج على الكراسي (X1) مهملا الطاولات (X2) فإنه يستطيع إنتاج 100 كرسي من ساعات الآلة المتوفرة.

يمكن الآن رسم الإحداثي السيني و الصادي وتحديد المستقيم الأول عليه كما يلي



تحديد اتجاه المستقيم الذي يحققه:

نختبر المستقيم مع نقطة الأصل أي نعوض X_1= صفر ، X_2= صفر

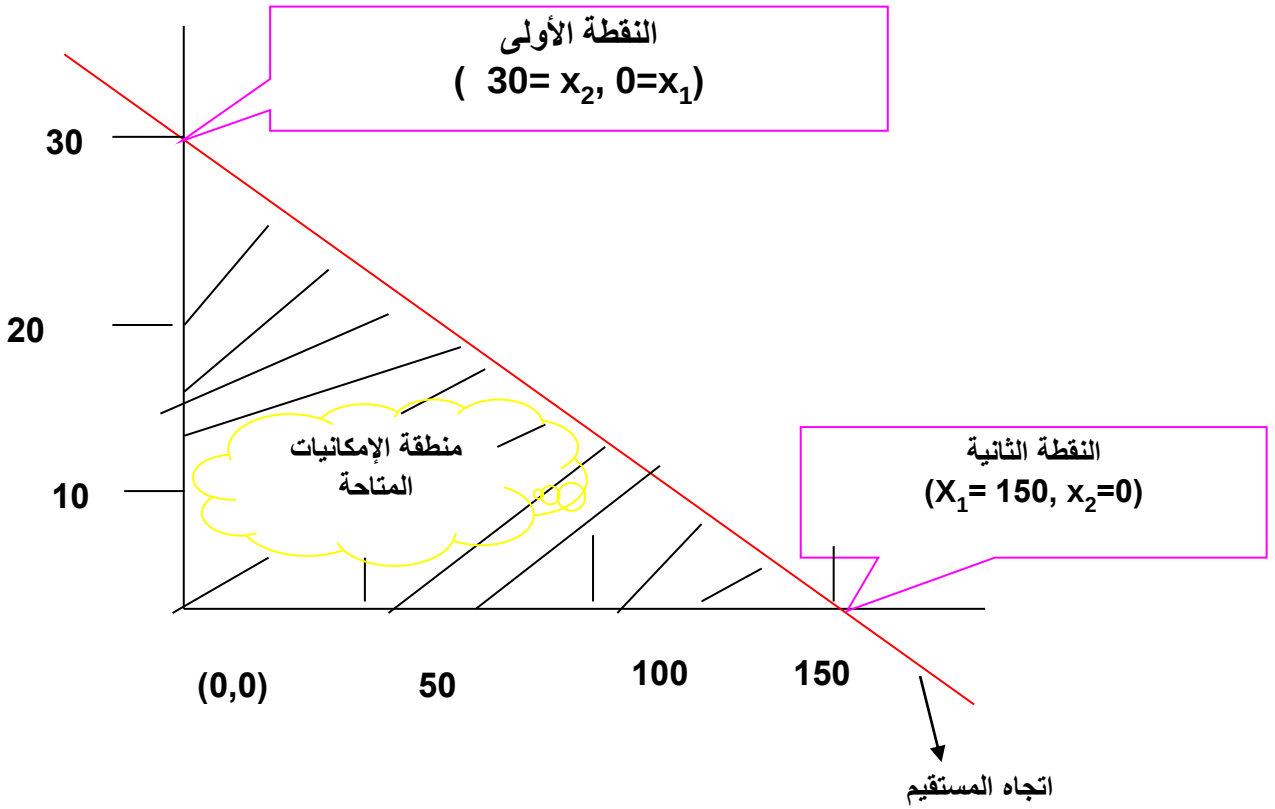
0+0≤100(true) إذن اتجاه المستقيم هو نحو نقطة الأصل ، وهذا يعني ببساطة أن أي نقطة على المستقيم أو بينه و بين نقطة الأصل تحققه. والمنطقة بين المستقيم و نقطة الأصل تسمى منطقة الإمكانيات المتاحة وفق هذا القيد بمعنى أن المنتج يستطيع إنتاج أي كمية ضمن المساحة المظللة و وفق القيد الأول.

المستقيم الثاني	
X_2	X_1
30	0
0	150

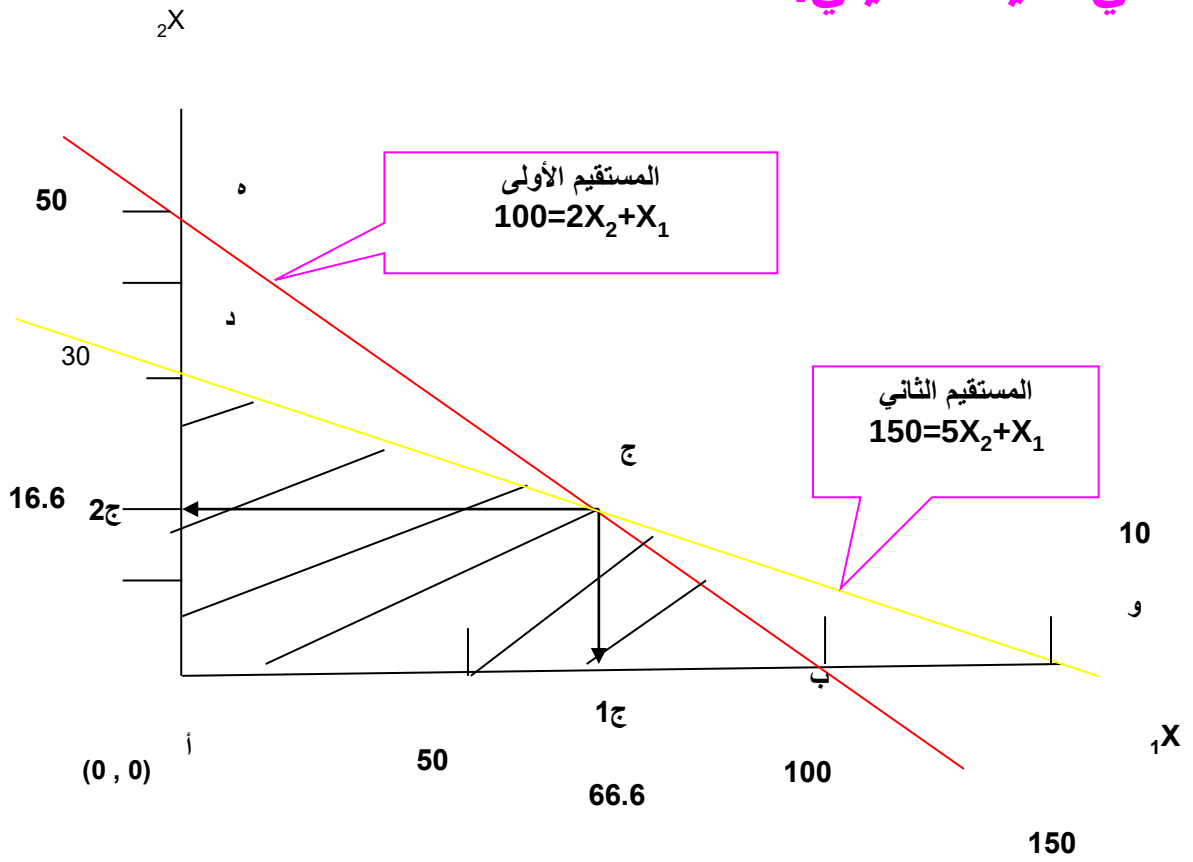
وتوضيحا لما تعنيه هذه الأرقام:
لو فرضنا أن المنتج ركز على إنتاج الطاولات (X_2) فقط ، وأهمل إنتاج الكراسي (X_1) ، فإنه يستطيع إنتاج 30 طاولة من ساعات العمل المتوفرة لديه (بفرض أن هذا القيد يمثل ساعات عمل).

بينما إذا ركز الإنتاج على الكراسي (X1) مهملا للطاولات (X2) فإنه يستطيع إنتاج 150 كرسي من ساعات العمل المتوفرة لديه

يمكن الآن رسم الإحداثي السيني والصادي وتحديد المستقيم الثاني عليه كما يلي :



ويمكن الآن رسم الإحداثي السيني و الصادي وتحديد المستقيمين الأول و الثاني عليه كما يلي:



المطلب الثاني :

نقوم بداية بتحديد منطقة الإمكانيات المتاحة والتي تحقق كلا المستقيمين ، وهي في هذه الحالة المنطقة أ ب ج د المظللة ، حيث يستطيع المنتج إنتاج أي كمية داخل هذه المنطقة وفق القيدين وهما : الوقت المتاح من العمل و الوقت المتاح من الآلة .

والهدف من حل هذه المشكلة هو تحقيق أعلى عائد ممكن ، و بإجراء التجارب وجد أن أعلى عائد يتحقق عند نقاط تقاطع المستقيمات ، لذلك يتم اختبار دالة الهدف عند هذه النقاط ، وهي أ ب ج د .

ملاحظات :

أولا : منطقة الإمكانيات المتاحة هي أ ب ج د والتي تحقق كلا المستقيمين .

ثانيا : خروج منطقة و ب ج من منطقة الإمكانيات المتاحة لأنها تحقق المستقيم الثاني فقط ، ولا تحقق المستقيم الأول.

ثالثا : خروج منطقة ه د ج من منطقة الإمكانيات المتاحة لأنها تحقق المستقيم الأول فقط ، ولا تحقق المستقيم الثاني.

المطلب الثالث :

تحديد النقطة التي عندها يكون الربح أعلى ما يكون وذلك من خلال تقييم نقاط تقاطع المستقيمات على أطراف منطقة الإمكانيات المتاحة وكما يلي :

النقطة	X_1	X_2	$Z=\$10\ x_1+\$40\ x_2$	النتيجة ($)
أ	0	0	0 × 40 + 0 ×10	0
ب	100	0	0 ×40 + 100 ×10	1000
ج	66.7	16.7	16.7 ×40 +66.7 ×10	1335
د	0	30	30 ×40 +0 ×10	1200

ملاحظات على نتيجة الحل:

نلاحظ أن أعلى عائد قد تحقق عند النقطة ج ، أي يجب إنتاج 66.7 كرسي ، و 16.7 طاولة لتحقيق عائد قدره 1335$ ونتيجة أنه لا يمكننا إنتاج كسور من الكراسي أو الطاولات يتم تقريبها للقيمة الأدنى حتى تكون ضمن منطقة الإمكانيات المتاحة .

كما يمكن تحديد مدى استغلال الموارد عند النقطة ج $X_1=66 , X_2 =16$

القيود	الطاقة المتاحة	معادلة دالة الهدف	المستغل	الفائض
x_1+2x_2	100	2 *16+ 1 *66	98	لا شيء تقريبا
x_1+5x_2	150	5*16+ 1 *66	146	لا شيء تقريبا

Example 2

تقوم الشركة الصناعية العامة بإنتاج نوعين من الدفاتر المدرسية: دفاتر كتابة ، وكراس رسم ، ولإتمام العملية الإنتاجية ؛ لابد من استخدام آلة، وعدد معين من ساعات العمل، والوقت المتاح للآلة هو 24ساعة، بينما الوقت المتاح من عنصر العمل هو 16ساعة ، تحتاج كل وحدة منتجة من دفاتر الكتابة إلى ساعتين من الآلة، وساعتين من العمل، بينما تحتاج كل وحدة من كراس الرسم إلى 3 ساعات من الآلة و ساعة واحدة من العمل.

ويبلغ سعر كل وحدة مباعة من دفاتر الكتابة $12 ، ومن كراس الرسم$14، علما بأن الشركة تستطيع أن تبيع سبع وحدات فقط من المنتج الأول ، وست وحدات من المنتج الثاني. وفي هذه الحالة يحتاج مدير الشركة إلى أن يحدد كمية الإنتاج من السلعتين التي تحقق للشركة أعلى عائد