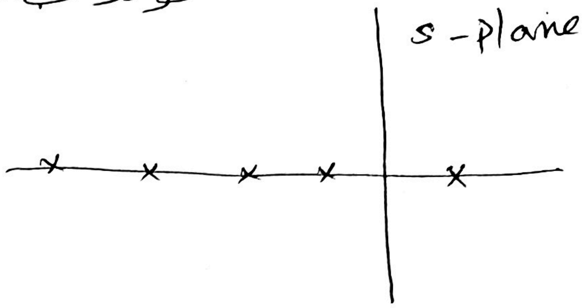
مثال ٢

لو كان ا C/CS Eq

تولد مصفوفة بالشكل التالي :

s^5	1
s^4	2
s^3	$-\frac{2}{3}$
s^2	-7
s^1	-6
s^0	-2



فهنا هنا يوجد pool واحد
في الجهة اليمنى لان هنالك
تغير واحد بالاشاره وهناك (4) بالجهة اليسرى .

مثال ٣

C/CS Eq. $s^4 + 5s^3 + 3s^2 + 20s + 1 = 0$

s^4	1	3	1
s^3	5	20	
s^2	$\frac{3\times5-20}{5}$	1	
s^1	$\frac{-20-5}{-1}$		
s^0	1		

$\frac{-5}{5} = -1$

$\Longrightarrow$

s^4	1
s^3	5
s^2	-1
s^1	25
s^0	1

هنا يوجد تغير من 5 ← -1 بالاشارة (يوجد pool واحد في اليمين)
ومن (-25) ← (1) يوجد pool آخر في اليمين .
فهنا 2 pools تقع في الجهة اليمنى والنظام Unstable

ملاحظات مهمة

لو كان النظام من الدرجة الثانية اي ان

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{A}{s^2+Bs+C}$$

فان تحليل المقام يكون احد الحالات التالية :-

(1) اما جذور (Real) عدد/2 مختلفة القيمة $\frac{2}{(s^2+3s+2)}$

$[s_1=-2, s_2=-1]$

(2) او جذور (Real) عدد/2 نفس القيمة $\frac{5}{s^2+4s+4}$.

$s_1=s_2=-2$

(3) او جذور Complex وتكون بالشكل التالي $\frac{10}{s^2+4s+8}$

$s_1=-2+j2$, $s_2=-2-j2$

$(s_{1,2}=-2\mp j2)$

(*) إذا كان التحليل لمعادلة المقام يأتي بجذور Complex فتظهر بشكل متشابه في قيمة الـ real part وتختلف بالاشارة في قيم الـ Imagenary part -- وتدعى Conjugate.

$$\frac{10}{s^2+4s+8} = \frac{10}{(s+2-j2)(s+2+j2)}$$

(*) في حالة وجود جذور مزدوجة Complex فان الـ (O/P) دائماً فيه (Oscillation) وكذلك تكون حتماً $[\zeta<1]$ damping ratio أقل من واحد ويدعى (Underdamped)

وفي حالة كون الجذور مختلفة وفقط (real) اي ليس complex فيكون الـ (O/P) يشبه الاستجابة لمنظومة first order وتكون فيه قيمة $[\zeta>1]$ اكبر من واحد ويدعى (Over damped)

واذا كانت الجذور حقيقية ومتشابهة $\begin{bmatrix} s_1=-2 \\ s_2=-2 \end{bmatrix}$ فان $\zeta=1$

ويدعى Critical damped system

Routh stability ملاحظات مهمة جداً

(*) اذا كانت معادلة characteristic eq C/cs وهي معادلة مقام ال Closed Loop T.F

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} = \text{Closed Loop T.F}$$

فيها احد المعاملات سالب فان هذه المنظومة Unstable بشكل مباشر.

مثال / $s^4+4s^3+2s^2-s+10=0$ → Unstable system.

مثال) هنا لا يمكن الحكم عن الاستقرارية → $C/cs = s^3+5s^2+12s+9$

لابد استخدام Routh Criterion.

s^3	1	12
s^2	5	9
s^1	$\frac{5\times12-9}{5}$	
s^0	9	

دائما احمل معامل اعلى اس واحد هنا s^3 معاملها واحد فلو كان غير ذلك نقسم الجميع على قيمة معامل (s^3).

هنا لان 60-9 اكبر من الصفر (موجب) وان العمود الاول جميع حدوده موجبة فان معناها المنظومة مستقرة.

مثال 2) لو كانت المعادلة بالشكل الاتي s^3+5s^2+s+9

s^3	1	1
s^2	5	9
s^1	$\frac{5\times1-9}{5}$	
s^0	9	

$\Rightarrow$

s^3	1
s^2	5
s^1	$\frac{-4}{5}$
s^0	9

هنا انه يوجد تغير من موجب الى سالب ($-\frac{4}{5} \leftarrow +5$) فمعناها يوجد pool واحد في جهة اليمنى من s-plane وبسبب التغير من ($-4/5$) الى 9 فهذا يمثل pool آخر يقع في الجهة اليمنى من s-plane.

(9/10)

ملاحظات مهمة

لا يجاد e_{ss} (steady state Error) نستخدم

$$e_{ss} = \lim s E(s)$$

وأن

$$E(s) = \frac{R(s)}{1+G(s)H(s)}$$

---

(1) for step i/p Unity $R(s) = \frac{1}{s}$

$$e_{ss} = \frac{\cancel{s}\cdot\frac{1}{\cancel{s}}}{1+G(0)H(0)} = \frac{1}{1+K_p}$$ position error Constant

(2) for Unit Ramp $R(s) = \frac{1}{s^2}$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{\cancel{s}\cdot\frac{1}{s^{\cancel{2}}}}{1+G(s)H(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{\cancel{s} + sG(s)H(s)}$$

$$= \frac{1}{\lim sG(s)H(s)} = \frac{1}{K_v}$$

الان نفترض انه اذا كانت $G(s)H(s)$ Type(ϕ) اي لا يوجد s يختصر مع s بالبسط بالمقام

فان قيمة $K_v = 0$

اي ان $e_{ss} = \frac{1}{0}$ وتساوي (∞) مثال $\frac{10}{s^2+5s+8} = G(s)H(s)$

$$\lim_{s\to 0} \frac{\cancel{s}\,10}{\cancel{s^2}+\cancel{5s}+8} = 0$$

واذا كانت $G(s)H(s)$ تحتوي على s في المقام مشترك اي Type(1)

مثال $G(s)H(s) = \frac{10}{s(s^2+5s+8)}$ فان

$$K_v = \lim_{s\to 0} s.G(s)H(s)$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{\cancel{s}\,10}{\cancel{s}(\cancel{s^2}+\cancel{5s}+8)} = \frac{10}{8} =$$

اي ان

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \frac{8}{10}$$

(8/10)

ملاحظات هامة

عندما تكون معادلة النظام لـ $\frac{Y(s)}{R(s)}$ أي $\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$

تسمى معادلة الخواص Characteristic equation.

$$C/CS \text{ Equation} = [1 + G(s)H(s)]$$

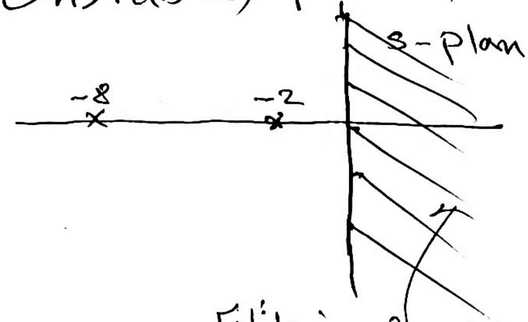
* اذا كانت هذه المعادلة قابلة للتحليل من الدرجة الثانية مثلاً فنستخدم الدستور لحلها

$$s_1, s_2 = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ولنفترض ان التحليل كان لمعادلة $s^2 + 10s + 16$ يأتي

بـ $s_1 = -8$ و $s_2 = -2$ $[(s+2)(s+8)]$

ان هذا النظام فيه (2 poles) وتقع في الجانب الايسر من s-plane وعليه يعتبر (stable) ولو وقع أحد الـ poles في الجانب الايمن من الـ s-plane فيصبح النظام (Unstable)



منطقة محظورة فيها النظام Unstable

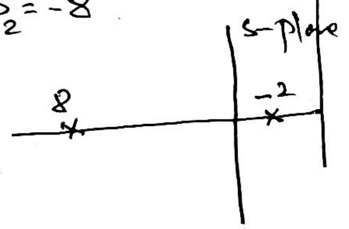
مثال

لو كانت المعادلة

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{12}{s^2 + 6s - 16} = \frac{12}{(s-2)(s+8)}$$

اي ان $s_1 = 2$, $s_2 = -8$

وعندما تكون الجذر يقع في الجهة اليمنى يصبح النظام Unstable



$\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n+\omega_n^2}$ ← 2nd order قياسي

أمثلة

① ① $G(s) = \frac{5}{(s+2)(s+5)}$

$\zeta > 1$ هنا $G(s) = \frac{5}{s^2+7s+10}$ $\quad 10=\omega_n^2$

$\omega_n = \sqrt{10} \simeq 3.1$

$\zeta = \frac{7}{2\times3.1}$ ← $2\zeta\omega_n = 7$ ←

أكبر من 1 ← ζ

② $\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{5}{s^2+4s+4} = \frac{5}{(s+2)(s+2)}$

$\omega_n = 2 \leftarrow \omega_n^2 = 4$ $\quad \zeta = 1$ هنا

$2\zeta\omega_n = 4 \rightarrow 2\zeta 2 = 4 \Longrightarrow \zeta = 1$

③ $\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{5}{s^2+4s+8}$

هنا $\omega_n = \sqrt{8} \simeq 2.85$

$2\zeta\omega_n = 4$

$\zeta = \frac{4}{2\times2.85} \Leftarrow 2\times\zeta\times2.85 = 4$

اي ان $\zeta < 1$

عندما تكون $(\zeta<1)$ يكون النظام فيه ذبذبة ω_d

damped freq. $\quad \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

وان الـ o/p يكون فيه حتماً (Overshoot) اي تجاوز قيمة الـ (I/P)

(في حالة الـ Unit step i/p) تجاوز قيمة الـ [1].

وتكون قيمة التجاوز Overshoot $= e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$ هنا $(\zeta<1)$

Systems ملاحظات مهمة للامتحان (4)

٣ استجابة المنظومات (Systems) تكون في احد الحالات التالية :

1- Under damped $\Longrightarrow [0 < \xi \text{ (damping ration)} < 1]$

2- Overdamped $\Longrightarrow [\xi > 1]$

3- Critically damped $\Longrightarrow [\xi = 1]$

4- Undamped $\Longrightarrow [\xi = 0]$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n + \omega_n^2}$$

معادلة نظام من الدرجة الثانية

(System Order) = اعلى أس للعامل اللابلاسي s في المقام

(type) = اعلى أس للعامل اللابلاسي (s) مشترك يمكن اخراجه خارج معادلة المقام .

مثال (1) :

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{5}{s^3 + 2s^2 + 3s + 12}$$

الدرجة (3)

النوع (ϕ) [لانه لا يمكن اخراج s مشترك من المقام]

مثال (2) :

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{12(s+3)}{(s^3 + 7s^2 + 15s)} = \frac{12(s+3)}{s^1(s^2 + 7s + 15)}$$

هنا المعادلة تبقى من الدرجة الثالثة ولكن (1 - Type)

(4/10)

ملاحظات مهمة (3)

بالنسبة لاي نظام من الدرجة الأولى اي $\left(G(s)=\frac{A}{s+\beta}\right)$ و (β, A) اي قيمة فان الحل بالنسبة لـ (input) يكون (Unit step) هو

$$y(t) = (\text{exponential})$$

لأن اللابلاس لل exponential (e^{-at}) هو $\frac{1}{s+a}$

اي ان لـ Unit step input

$$y(t) = \left(1-e^{-t/\tau}\right) \Longrightarrow \tau = \text{time constant}$$

وان $\tau = \frac{1}{a}$ اي للمثال السابق $\tau = \frac{1(sec)}{5}$

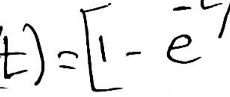
وعلى افتراض ان (a) ممكن تكون اي قيمة فاذا كانت مثل ($a=2$)
فان $\left(\tau = \frac{1}{2} = 0.5\right)$ وال o/p يكون

$$y(t) = \left[1-e^{-t/0.5}\right] = \left[1-e^{-2t}\right]$$

وان قيمة ال o/p عند الزمن $[t=\tau]$ اي عند الزمن 0.5s يكون

$$y(t=0.5) = 1-e^{-\frac{0.5}{0.5}} = 1-e^{-1} = 0.635.$$

(*) ان المعادله من الدرجة الاولى حلها بالزمن يكون دائماً exponentials اي دالة اسية

عند Unit step i/p تكون

ولا يمكن ان يوجد فيها (Oscillation) بهذا الشكل

في جميع الاحوال.

* ان Oscillations تظهر في معادلات الدرجة الثانية فما فوق.

ملاحظات مهمة (3)

بالنسبة لاي نظام من الدرجة الأولى اي $\left(G(s) = \dfrac{A}{s+\beta}\right)$
و (β , A) اي قيمة فان الحل بالنسبة ~~(A/β)~~ لـ $(input)$
يكون $(Unit\ step)$ هو

$$y(t) = (exponential)$$

لأن اللابلاس للـ exponential $\left(e^{-at}\right)$ هو $\dfrac{1}{s+a}$

اي ان لـ Unit step input

$$y(t) = \cancel{A}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \Longrightarrow \tau = \text{time Constant}$$

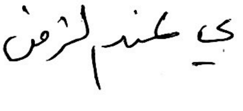
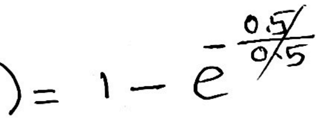
وان $\tau = \dfrac{1}{a}$ اي المثال السابق $\tau = \dfrac{1 (sec)}{5}$

وعلى افتراض ان (a) ممكن تكون اي قيمة فاذا كانت مثلا $(a=2)$
فان $\left(\tau = \dfrac{1}{2} = 0.5\right)$ وال o/p يكون $y(t) = \left[1 - e^{-t/0.5}\right]$

$$= \left[1 - e^{-2t}\right]$$

وان قيمة ال o/p عند الزمن $[t = \tau]$ اي عند الزمن 0.5s
يكون

$$y(t=0.5) = 1 - e^{-\frac{0.5}{0.5}} = 1 - e^{-1} =$$
$$= 0.635 .$$

(*) ان المعادله من الدرجة الاولى حلها بالزمن يكون دائما exponential
اي داله اسية  مثلا Unit step = i/p تكون 
ولا يمكن ان يوجد فيها (Oscillation) بهذا الشكل  في جميع الاحوال .

* ان Oscillation يظهر في معادلات الدرجة الثانية فما فوق .

ملاحظات مهمة (2)

حتى تجد $y(t)$ من معادلة $\frac{Y(s)}{R(s)}$ ، والـ(I/P) كان Unit step

يجب ان تحول الاشارة الداخلة للمنظومة بالابلاس اي

$$r(t) = \text{Unit step I/p} = 1$$

فان

$$\boxed{R(s) = \frac{1}{s}}$$

وبذلك فان معادلة الـ T.F Closed loop تضرب في R(s)

لايجاد Y(s) .... اي !

$$Y(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} \cdot R(s)$$

واذا كان السؤال يقول Unity feedback و Unit step I/P تصبح .

$$Y(s) = \frac{G(s)\cdot\frac{1}{s}}{1+G(s)} = \frac{G(s)}{s\left[1+G(s)\right]}$$

مثال) $G(s) = \frac{2}{s+3}$ في Unity feedback System و Unit step I/P فان

معادلة Y(s) تصبح

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{2}{s+3+2} = \frac{2}{s+5}$$

$$Y(s) = \frac{2}{s+5}\cdot\frac{1}{s} = \frac{2}{s(s+5)}$$

$$y(t) = \text{Laplace Inverse of } Y(s) = \mathcal{L}^{-1}Y(s)$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s(s+5)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{A}{s}+\frac{B}{s+5}\right]$$

$$A = \left.\frac{2\cdot\cancel{s}}{\cancel{s}(s+5)}\right|_{s=0} = \frac{2}{5} \quad ; \quad B = \left.\frac{2\cancel{(s+5)}}{s\cancel{(s+5)}}\right|_{s=-5} = \frac{-2}{5}$$

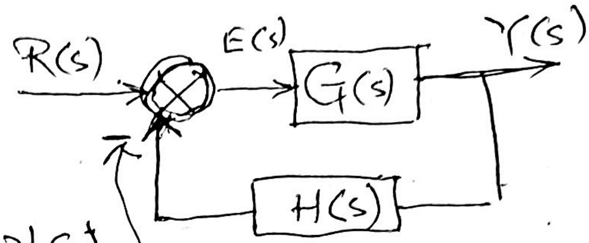
$$\therefore\ y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2/5}{s}\right) - \frac{2}{5}\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{(s+5)} = \boxed{\frac{2}{5} - \frac{2}{5}e^{-5t}}$$

$$= \frac{2}{5}\left[1 - e^{-5t}\right]$$

ملاحظات مهمة ①

$G(s) = \left(\text{feed forward path}\right)$ معادلة

$H(s) = \left(\text{feedback path}\right)$ معادلة



إيجاد المعادلة النهائية $\frac{Y(s)}{R(s)}$ تكون

$$T.F = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Transfer Function

إذا يعطيك $G(s)$ ومنطوق السؤال يقول
for a Unity feedback system with (-ve) feedback
معناها $[H(s)=1]$ وبذلك تكون T.F المنظومة المغلقة

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

مثال) أوجد $\frac{Y(s)}{R(s)}$

$$G(s) = \frac{10 \leftarrow B(s)}{s(s+3) \leftarrow A(s)}$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{B(s)}{A(s) + B(s)}$$

$A(s) = G(s)$ تمثل مقام

$B(s) = G(s)$ تمثل بسط

وبذلك تصبح المعادلة النهائية

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{10}{s(s+3)+10} = \frac{10}{s^2+3s+10}$$

مثال ②/

$$G(s) = \frac{5(s+2) \leftarrow B(s)}{s^2+7s+3 \leftarrow A(s)}$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{5(s+2)}{(s^2+7s+3)+5(s+2)} = \frac{5(s+2)}{s^2+12s+5}$$