

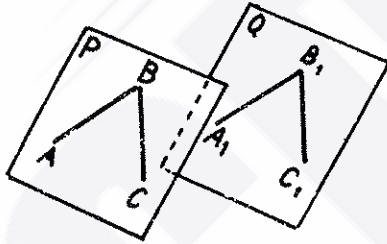
الفصل السادس .

العلاقة المتبادلة بين المستويات والعلاقة بين المستوي والمستقيمات الخارجة عنه

- العلاقة المتبادلة بين مستويين
- العلاقة المتبادلة بين مستو ومستقيم خارج عنه
- تحديد خط تقاطع مستويين (الفصل المشترك)
- تقاطع مستقيم مع مستو في الحالة العامة
- توازي مستقيم ومستو
- توازي المستويات
- التعامد المتبادل بين مستقيم ومستو
- تعامد مستقيمين
- تحديد المستويات المتعامدة
- إسقاط زاوية بين مستقيم ومستو
- تحديد مساقط زاوية بين مستويين

VI - ١- العلاقة المتبادلة بين مستويين :

ان العلاقة المتبادلة بين أي مستويين يمكن أن تكون احدي حالتين
لاثالث لهما : فاما أن يكونا متوازيين أو متقاطعين .

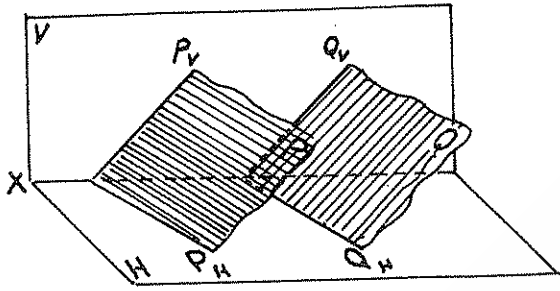


شكل رقم (١٤٠)

في أي مستويين متوازيين
(كالمستويين P و Q في الشكل
١٤٠) يمكن ايجاد مستقيمين
متقاطعين متوازيين .
وهذه الحالة تُعد القاعدة

الأساسية في تحديد الوضع المتبادل لمستويين ، وفيما اذا كانا متوازيين أم
غير متوازيين . وهذه القاعدة يمكن أن تصاغ على النحو التالي : اذا وازى
مستقيمان متقاطعان في مستو مستقيمين متقاطعين واقعين في مستو آخر
فان المستويين متوازيان . فالشكل (١٤٠) يوضح أن المستقيمين
المتقاطعين AB و BC الواقعان في المستوي P يوازيان المستقيمين
المتقاطعين A_1B_1 و B_1C_1 الواقعين في المستوي Q وبالتالي نجد أن
المستويين P و Q متوازيان .

وهذه القاعدة تُعد آثار المستويات المتقاطعة مستقيمتا معنيصة ،
ولهذا نلاحظ من خلال الشكل (١٤٠) أن المستويين P و Q متوازيان ،



شكل رقم (١٤١)

لأن أثري الأول الأفقي والأمامي المتقاطعين (المتلاقين) عند خط الأرض يوازيان أثري الثاني اللذين يماثلان الأول ، أي :

$$Q_h // P_h \text{ و } Q_v // P_v$$

والشيء نفسه يمكن أن نقوله

بالنسبة للمستويين R و Q في الشكل (١٤٢) $Q_h // R_h$ و $Q_v // R_v$

و $Q_w // R_w$. من جهة أخرى يكفي أن يتقاطع أثران متماثلان لتكوّن

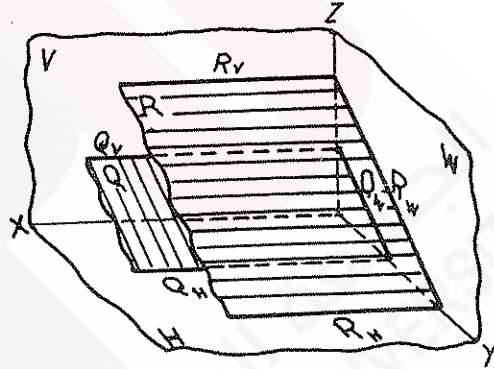
المستويات متقاطعة . فالشكل (١٤٣)

يوضح أن الأثرين الأماميين متوازيان

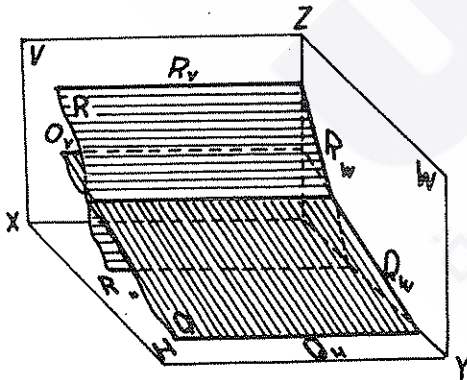
، لكن الأثرين الأفقيين $(Q_v // P_v)$ ،

Q_h و P_h متقاطعان لذلك يكوّن

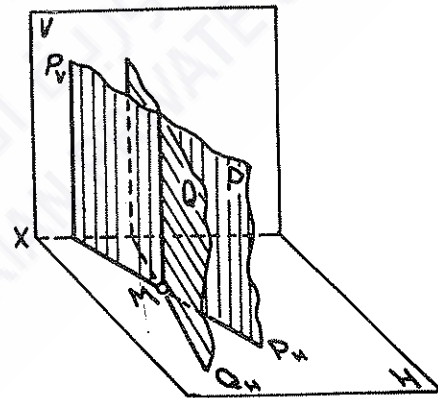
المستويان P و Q متقاطعين .



شكل رقم (١٤٢)



شكل رقم (١٤٤)



شكل رقم (١٤٣)

من الضروري هنا التأكيد على أن أثري المستوي اللذين يوازيان

نظيريهما في مستو آخر لابد أن يكونا متلاقين ، ليحققا شرط التوازي لمستويهما ، وبعبارة لا يمكن الجزم بالوضع المتبادل للمستويين . فعندما تكون الآثار $Q_h // R_h$ و $Q_v // R_v$ و $Q_h // Q_v$ و $R_h // R_v$ في الوقت نفسه لا يمكننا أن نعرف ان كان المستويان متوازيين أم متقاطعين . ولتحديد ذلك لابد أن نتحقق من العلاقة المتبادلة بين الأثرين الباقيين ، أي الأثرين الجانبيين R_w و Q_w . ففي الشكل (١٤٤) نجد على الرغم من أن $Q_h // R_h$ و $Q_v // R_v$ أن المستويين Q و R متقاطعان ، لأن مسطيهما الجانبيين Q_w و R_w متقاطعان . فاذا لم تكن المستويات محددة بآثارها فان تحديد وضعها المتبادل يحتاج الى انشاءات مساعدة سنعرضها لاحقا .

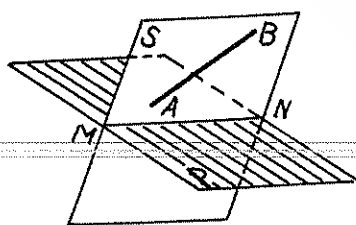
VI - ٢- العلاقة المتبادلة بين مستو ومستقيم خارج عنه :

ان العلاقة بين مستقيم ومستو يمكن - كما هو الحال بالنسبة للعلاقة بين مستويين - أن تكون احدي الحالتين التاليتين :

١- مستقيم يتقاطع مع المستوي ، أو

٢- مستقيم يمازي المستوي .

يمعب أحيانا في التعبير الاسقاطي أو الفراغي أن نحدد العلاقة المتبادلة بين المستقيم والمستوي . وفي مثل هذه الحالات نستخدم انشاءات مساعدة ننتقل فيها من مسألة تحديد العلاقة بين مستو ومستقيم خارج عنه



شكل رقم (١٤٥)

الى مسألة تحديد العلاقة المتبادلة بين

المستقيم المعني ومستقيم مساعد آخر . ولهذا

الغرض نمرر من المستقيم المعني AB

(الشكل ١٤٥) مستويا مساعدا S يقطع

المستوي المعني P ثم ندرس العلاقة بين المستقيم AB وخط تقاطع المستويين MN ، وفي هذه الحالة نلاحظ أحد الاحتمالين :

١- المستقيمان AB و MN متقاطعان ، وهذا يعني أن المستقيم AB يقطع المستوي المعني P .

٢- المستقيم AB يوازي المستقيم MN ، وهذا يعني حسب بديهيات

التوازي أن المستقيم AB يوازي المستوي P .

من الضروري أن نشير في هذا المجال الى أننا عند اختيار المستوي

المساعد يجب أن نختار وضعيته بحيث نجد أن العلاقة الناشئة بين العناصر

المعنية تكون بسيطة ومباشرة أو أن ايجادها يتطلب خطوات قليلة .

VI - ١-٢- تقاطع مستقيم مع مستو اسقاطي :

عندما يكون المستوي اسقاطيا نرى أن مسقطه على المستوي المتعامد

معه - مهما كان شكل تحديده ومهما كانت العناصر الهندسية التي تحدده -

يكون خطا مستقيما منطبقا على أثره ، ونجد أن مساقط جميع العناصر

الهندسية الواقعة عليه ، أي : على مستوي الاسقاط ، تنطبق على هذا

المستقيم ، أي : على أثره . وضمن هذه العناصر

تقع بالتأكيد نقطة تقاطع المستقيم الخارج عنه

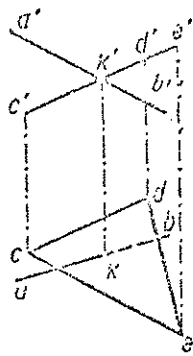
والمقاطع معه . لدينا في الشكل (١٤٦) مستو

اسقاطي أمامي محدد بالمثلث CDE والمستقيم

المتقاطع معه AB . ولما كان المستوي

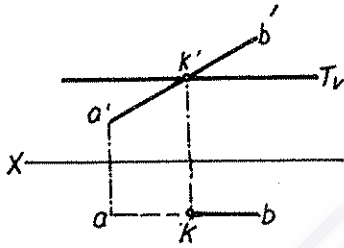
اسقاطيا أماميا فان مسقطه الأمامي يكون خطا

مستقيما $c'd'e'$ وتمثل النقطة k' الواقعة



شكل رقم (١٤٦)

عليه المسقط الأمامي لنقطة تقاطع المستقيم AB مع المستوي \cdot بعد ذلك يمكننا بسهولة تحديد مسقطها الأفقي k بانزال مستقيم شاقولي حتى يتقاطع مع ab في النقطة k \cdot



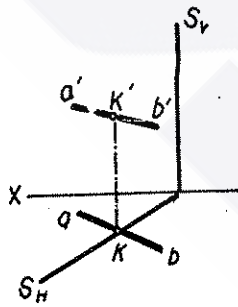
شكل رقم (١٤٧)

لدينا في الشكل (١٤٧) المستوي T_v

الموازي لمستوي الاسقاط الأفقي ، أي مستوي اسقاطي ثنائي (مستو اسقاطي أمامي وجانبي في آن معا) ولهذا يكون لدينا في التعبير الاسقاطي الثنائي أثره

الأمامي T_v ، ولدينا أيضا المستقيم AB المتقاطع معه \cdot وأما نقطة التقاطع فاننا نحددها من خلال مسقطها الأمامي k' الحاصل من تقاطع أثر المستوي T_v والمسقط الأمامي $a'b'$ للمستقيم ، ثم نحدد بعد ذلك مسقطها الأفقي بالطريقة السابقة نفسها \cdot

يمثل الشكل (١٤٨) تقاطع المستقيم



شكل رقم (١٤٨)

AB مع مستو اسقاطي أفقي S محدد بأثاره \cdot وهنا أيضا تحدد نقطة تقاطعهما من خلال تحديد مسقطها الأفقي k من تقاطع المسقط الأفقي ab للمستقيم مع أثر المستوي الأفقي S_H ، ثم نحدد المسقط الأمامي k' بالطريقة السابقة نفسها \cdot

VI ٢-٢ تحديد الأوضاع المتبادلة للمستقيمت المتقاطعة مع مستويات :

أشرنا في الفصل الثالث (III ٦) من خلال تحديد الوضع الفراغي

للمستقيم بالنسبة لمستويات الإسقاط الى التمييز بين الأجزاء المرئية وغير المرئية من المستقيم حسب موقعه بالنسبة لمستويات الإسقاط .

وفي موضوعنا الحالي سندرس الأوضاع المتبادلة بين المستقيم والمستوي المتقاطع معه وتحديد أجزاء المستقيم المخفية الواقعة تحت المستوي المتقاطع معه . وهنا أيضا سنستخدم التنقيط ، أي : الخط المتقطع ، في الإشارة الى الأجزاء المخفية من العنصر الهندسي . ان معرفة طريقة تحديد هذه الأوضاع المتبادلة بين المستقيم والمستوي المتقاطع معه تمثل الأساس في تحديد الوضع المتبادل بين المستويات المتقاطعة .

من المتعارف عليه افتراض أن العناصر الهندسية هي عناصر غير شفاة سواء أكانت نقطة أم مستقيما أم مستويا . ولهذا نجد أن بعض العناصر الهندسية الواقعة على مستقيم إسقاطي واحد يغطي بعضها الآخر ، ويكون أعلاها مرئيا فحسب . في الشكل (١٤٦) يخترق المستقيم AB المستوي CDE في النقطة K ، وبالتالي يصبح جزء منه فوق المستوي ويغدو جزء آخر منه تحته . ولهذا نجد أن الجزء KB من المستقيم يغطي بالمستوي CDE وبالتالي يكون غير مرئي ، ولذلك يرسم الجزء kb من المسقط الأفقي للمستقيم بخط متقطع (منقط) . المستقيم AB يخترق المستوي T في الشكل (١٤٧) والمستوي S في الشكل (١٤٨) في النقطة K ، وبالتالي نجد أن الجزء KA من المستقيم يغطي بالمستوي ، ولهذا نرى أن الجزء ka من المسقط الأفقي في الشكل الأول والجزء k'a' من المسقط الأمامي في الشكل الثاني يكونان مخفيين ، نرسم لهما بخط متقطع (منقط) .

ذكرنا أن واحدة من النقاط الواقعة على مستقيم إسقاطي واحد (خط تداع) تكون مرئية ، وهي العليا ، وهذا يعني مايلي :

١- بالنسبة لمستوي الاسقاط الأفقي H تكون النقطة المرئية هي النقطة الأكبر بُعداً عن H .

١- بالنسبة لمستوي الاسقاط الأمامي V تكون النقطة المرئية هي النقطة الأكبر بُعداً عن V .

٢- بالنسبة لمستوي الاسقاط الجانبي W تكون النقطة المرئية هي النقطة الأكبر بُعداً عن W .

وإذا كنا نستخدم التعبير الإسقاطي المحوري فان تحديد النقاط المرئية يتم على أساس خطوط تداعيها وبُعد المساقط التي تناظرها عن محور الإسقاط ، وهذا يعني مايلي :

١- بالنسبة لمستوي الاسقاط الأفقي H تكون النقطة المرئية هي النقطة ذات المسقط الأمامي الأبعد عن محور الإسقاط ، أي : عن خط الأرض OX .

٢- بالنسبة لمستوي الاسقاط الأمامي V تكون النقطة المرئية هي النقطة ذات المسقط الأفقي الأبعد عن محور الإسقاط ، أي: عن خط الأرض OX .

٣- بالنسبة لمستوي الاسقاط الجانبي W تكون النقطة المرئية هي النقطة ذات المسقط الأفقي الأبعد عن محور الإسقاط OY أو ذات المسقط الأمامي الأبعد عن محور الإسقاط OZ .

لندرس الآن كيفية تحديد النقاط المرئية في التعبير الإسقاطي الشامل (دون استخدام محاور الإسقاط) ، ولنأخذ المثال الذي يوضحه الشكل (١٤٩):

لدينا الوضع الإسقاطي الشامل الثنائي لمستقيمين متخالفين M و L :

١- النقطتان 1 و 2 تقعان على مستقيم إسقاطي أمامي (خط تداع) واحد .

٢- النقطتان 3 و 4 تقعان على مستقيم اسقاطي أفق (خط) خط
تداع) واحد .

إذا درسنا مساقط هذين المستقيمين نجد أن :

١- نقطة تقاطع المستقيمين الأفقيين تمثل

نقطة تطابق احدهما (النقطة 3) التي

تنتمي الى المستقيم M ، والأخرى

(النقطة 4) التي تنتمي الى

المستقيم L . ولما كان

$3'3 > 4'4$ فان النقطة المرئية

بالنسبة لمستوي الاسقاط الأفقي H

تكون هي النقطة 3 التي تنتمي الى

المستقيم M . وأما النقطة 4

التي تنتمي الى المستقيم L فتكون مخفية ، لأنها مغطاة
بالنقطة 3 .

٢- نقطة تقاطع المسقطين الأماميين تمثل نقطة تطابق مسقطي

نقطتين احدهما (النقطة 1) التي تنتمي الى المستقيم L ، والأخرى

(النقطة 2) التي تنتمي الى المستقيم M . ولما كان $1'1 > 2'2$

فان النقطة المرئية بالنسبة لمستوي الاسقاط الأمامي V تكون هي

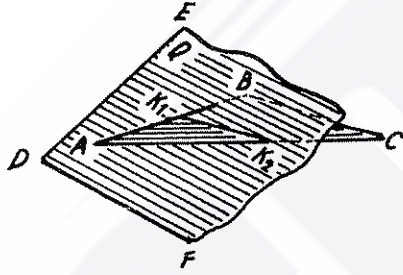
النقطة 1 التي تغطي النقطة 2 ، فتكون الأخيرة مخفية .

هذه الطريقة هي طريقة عامة يمكن استخدامها في الاسقاط المحوري أيضا ،

تستخدم أيضا في تحديد أوضاع المستويات المتقاطعة .

VI - ٢- تحديد خط تقاطع مستويين (الفصل المشترك) :

إذا لم يكن المستويان - كما ذكرنا سابقا - متوازيين فلا بد أن يكونا متقاطعين ، ونتيجة تقاطعهما نحصل على مستقيم مشترك بينهما نسميه بالفصل المشترك للمستويين أو خط تقاطعهما . ولتحديد مستقيم ما يكفينا - كما هو معروف لدينا - أن نحدد نقطتين منه أو نقطة واحدة منه إذا كان اتجاهه معروفا .



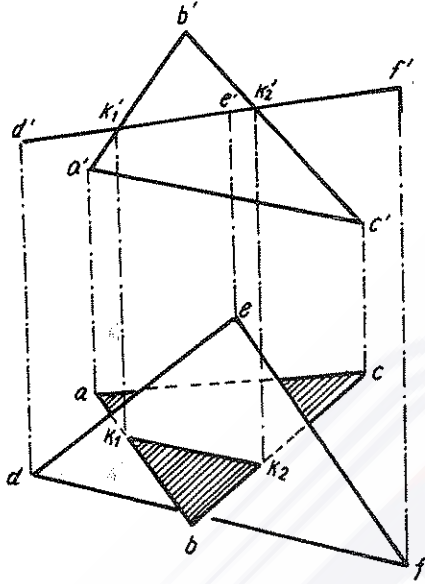
شكل رقم (١٥٠)

لندرس الحالة التي يوضحها الشكل (١٥٠) : لدينا المستوي المحدد بالمثلث ABC والمستوي Q المتقاطع معه والمحدد بالمستقيمين DE و DF . المستقيم K_1K_2 يمثل خط تقاطع المستويين ، ومن جهة أخرى تمثل النقطة K_1 نقطة اختراق

المستقيم AB للمستوي Q ، وتمثل النقطة K_2 نقطة اختراق المستقيم AC للمستوي Q ، ولهذا تنتمي هاتان النقطتان إلى كلا المستويين في وقت واحد .

ولذلك نحتاج في الحالة العامة من تحديد خط تقاطع المستويين إلى تحديد نقطتين مشتركتين بينهما . ولإيجاد كل من هاتين النقطتين نحتاج اعتياديا إلى انشاء خاص ، ولكن إذا كان واحد من هذين المستويين على الأقل مستويا اسقاطيا فإن حل هذه المسألة ، أي : إيجاد مساقط نقاط التقاطع ، يسهل كثيرا .

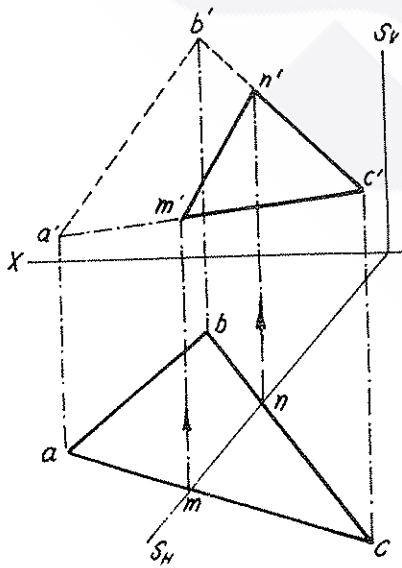
لنأخذ الحالة التي يوضحها الشكل (١٥١) : لدينا مستويان متقاطعان محددان بالمثلثين ABC و DEF الذي يمثل مستويا اسقاطيا



شكل رقم (١٥١)

أماميا ولهذا نجد أن مسقطه الأمامي
يمثله المستقيم $d'e'f'$ ، وتمثل
النقطتان k_1' و k_2' المسقطين
الأماميين لنقطتي تقاطع (اختراق)
المستقيمين AB و BC للمستوي
 DEF وبالتالي نجد أن هاتين
النقطتين تنتميان في آن إلى كلا
المستويين ، وهذا يعني أنهما
واقعتان على خط تقاطعهما . ولذلك
نوجد مسقطيهما الأفقيين k_1 و k_2
على كل من مسطحي المستقيمين

AB و BC الأفقيين ab و bc ، ونوصل بينهما فنحصل على المسقط
الأفقي k_1k_2 لخط التقاطع . وأما مسقطه الأمامي فيمثله مقطع المستقيم
 $k_1' k_2'$ المنطبق على المسقط الأمامي $d'e'f'$ للمستوي DEF .

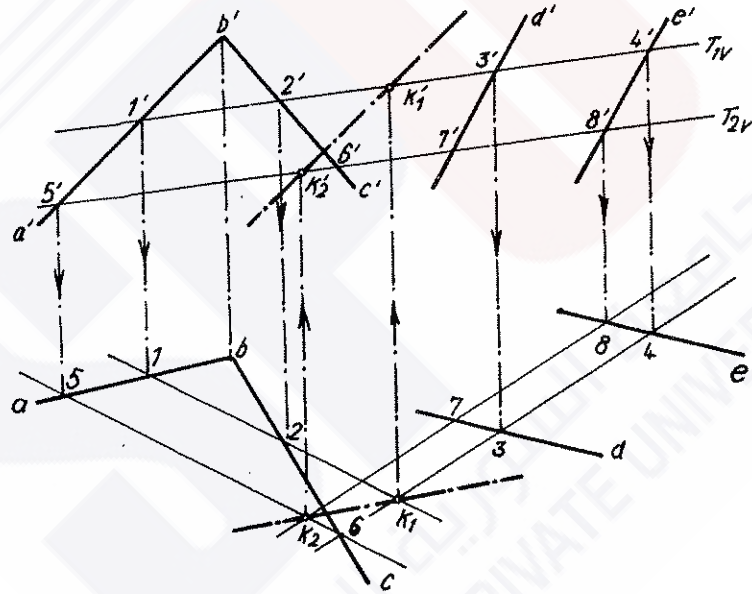


شكل رقم (١٥٢)

يوضح الشكل (١٥٢) مثالا آخر على
الوضعية الخاصة للمستويات المتقاطعة:
لدينا مستو اسقاطي أفقي S محدد
بأثريه ومتقاطع مع مستو محدد بالمثلث
 ABC . ففي هذا المثال نحصل مباشرة
من المسقط الأفقي للمستويين والذي
يمثله أثر المستوي الأفقي S_h والمسقط
الأفقي abc للمستوي الثاني على

المسقط الأفقي لخط التقاطع mn ، حيث أن النقطتين m و n تمثلان المسطتين الأفقيين لنقطتي تقاطع المستقيمين BC و AC مع المستوي S ، لذلك تنتمي ان لكلا المستويين في آن ، ثم نحدد على المسطتين الأماميين $b'c'$ و $a'c'$ المسطتين الأماميين m' و n' لنقطتي التقاطع ، وحين نصل بينهما نحصل على المسقط الأمامي $m'n'$ لخط تقاطع المستويين .

لندرس الآن الحالة العامة لتقاطع مستويين ليسا في وضعية خاصة ، ولنفترض أن لدينا مستويين متقاطعين ، أحدهما P محدد بمستقيمين



شكل رقم (١٥٣)

- متقاطعين AB و BC ، والآخر Q محدد بمستقيمين متوازيين D و E .
- والمطلوب أن نحدد خط تقاطعهما (فصلهما المشترك) .

للتوصل الى حل مثل هذه المسائل لابد - كما ذكرنا سابقا - أن

نستخدم انشاءات مساعدة (الشكل ١٥٣) ولحل هذه المسألة نستخدم مستويين اسقاطيين أماميين (يمكن أيضا أن نستخدم مستويين اسقاطيين

أفقيين أو نستخدم واحدا أماميا وآخر أفقيا) فنحصل اسقاطيا على الأثـر
الأمامي T_{1v} و T_{2v} لكل منهما .

ان تقاطع ثلاثة مستويات يعطينا - كما ذكرنا في الفصل الأول من هذا
الكتاب عند الحديث عن التعبير الاسقاطي الثلاثي - نقطة واحدة مشتركة
بينهما ، تمثل نقطة تلاقي (تقاطع) فصولهم المشتركة . وعلى هذا الأساس
نجد في مسألتنا هذه أن تقاطع المستوي T_1 مع المستويين المعنيين
سيعطينا نقطة مشتركة بينهما ، تقع ضمنا على الفصل المشترك بين
المستويين المعنيين وأن تقاطع T_2 معهما سيعطينا نقطة ثانية واقعة أيضا
على هذا الفصل المشترك . ولذلك نقوم بعد امرار T_1 و T_2 بالخطوات
التالية :

١- نحدد خط تقاطع T_1 مع المستوي P ، وهو المستقيم 1 2 ، بالطريقة
التي توضحها الأمثلة السابقة من هذه الفقرة .

٢- نحدد خط تقاطع T_1 مع المستوي Q ، وهو المستقيم 3 4 ، بالطريقة
ذاتها .

٣- من تقاطع 1 2 و 3 4 نحصل على النقطة المشتركة الأولى K_1 بين
المستويات الثلاثة والواقعة ضمنا على الفصل المشترك بين P و Q .

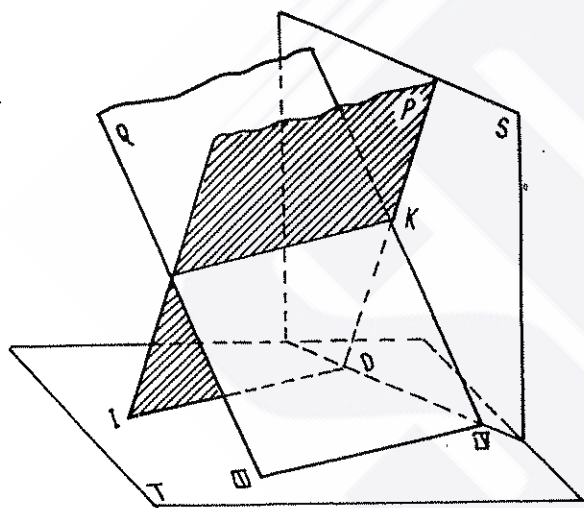
٤- نحدد خط تقاطع T_2 مع المستوي P ، وهو المستقيم 5 6 ، بالطريقة
نفسها .

٥- نحدد خط تقاطع T_2 مع المستوي Q ، وهو المستقيم 7 8 ، بالطريقة
ذاتها .

٦- من تقاطع 5 6 و 7 8 نحصل على النقطة المشتركة الثانية K_2 بين
المستويات الثلاثة والواقعة ضمنا على الفصل المشترك بين P و Q .

٧- حين نصل بين K_1 و K_2 نحصل على الفصل المشترك K_1K_2 والمطلوب بين المستويين P و Q .

نحصل في بعض الأحيان ، عند استخدام مستو اسقاطي مساعد (أمامي ، أو أفقي ، أو جانبي) أو أكثر على فصول مشتركة لهذا المستوي مع المستويات المعنية بحيث تكون متوازية . وللتأكد من الوضعية المتبادلة الحقيقية بين هذه المستويات لابد أن نستخدم مستويا اسقاطيا مساعدا آخر عموديا على مستوي اسقاط غير المستوي المتخذ في الحالة الأولى . مثلا :



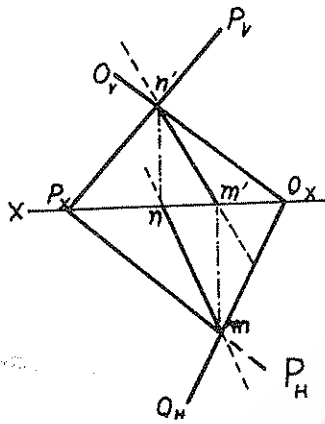
شكل رقم (١٥٤)

نحصل عند استخدام مستو اسقاطي أمامي مساعد T (الشكل ١٥٤) على فصل مشترك (I - II) بينه وبين المستوي P ، يوازي الفصل المشترك (III - IV) بين المستويين T و Q . وللتأكد من العلاقة المتبادلة بين المستويين P و Q لابد أن نأخذ مستويا اسقاطيا مساعدا آخر ، هو في هذه المرة اسقاطي أفقي S ،

ف نجد أن الفصول المشتركة بينه وبين المستويين P و Q تتقاطع في النقطة K . وهذا يعني أن المستويين P و Q متقاطعين والفصل المشترك بينهما يمثل مستقيما أفقيا يمر من النقطة K ويوازي المستقيمين (I-II)

و (III-IV) .

إذا كانت المستويات المتقاطعة محددة بآثارها ، فإن نقاط تقاطع

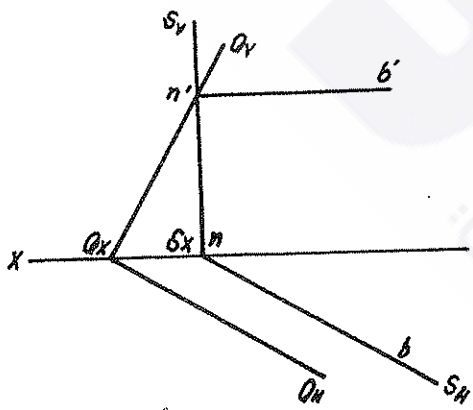


شكل رقم (١٥٥)

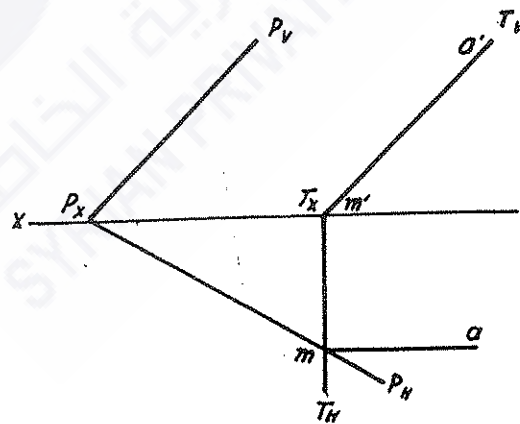
آثارها المتشابهة تمثل النقاط المشتركة بينها ، أي النقاط الواقعة على فصلهما المشترك (الشكل ١٥٥) .

ان هذه القاعدة لاتشكل استثناء من الطريقة السابقة ، ولكنها تمثل حالة خاصة بها ، تكون فيها المستويات الاسقاطية المساعدة المستخدمة هي مستويات الاسقاط نفسها وتمثل الفصول

المشتركة بينها وبين المستويات المعنية آثار هذه المستويات الأخيرة في مستويات الاسقاط . من جهة أخرى نجد أن تقاطع الآثار المتماثلة تمثل أثر المستقيم المشترك بين المستويين ، أي فصلهما المشترك ، في مستوي الاسقاط المعني . وفي هذه الحالة تكون لدينا نقطتان من نقاط خط التقاطع المطلوب . ولرسم مساقط خط تقاطع مستويين محددين بآثارهما (مثلا P و Q في الشكل ١٥٥) يكفي أن :



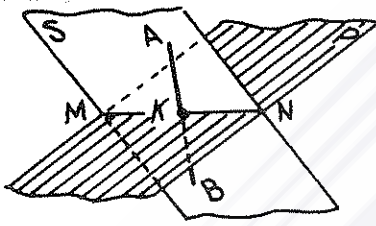
شكل رقم (١٥٦)



شكل رقم (١٥٧)

من نقاط خط التقاطع ، تحدد بنقطة تقاطع آثارهما المتقاطعة . وبعد ذلك ترسم من مساقط هذه النقطة مساقط خط التقاطع حسب وضعيته الخاصة المكتسبة من الوضعية الخاصة للمستوي المتقاطع .

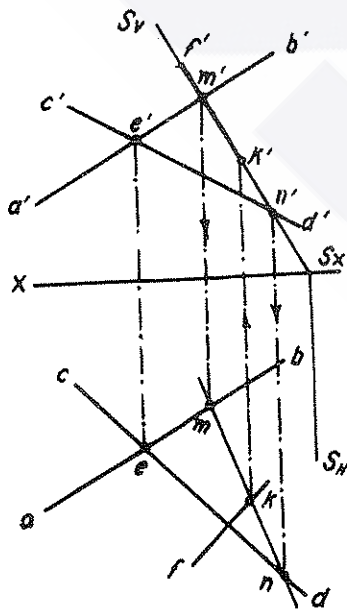
VI - ٤- تقاطع مستقيم مع مستو في الحالة العامة :



شكل رقم (١٥٩)

لتحديد نقطة تقاطع مستقيم مع مستو في حالته العامة يجب اتخاذ الخطوات التالية (الشكل ١٥٩) :

- ١- من خلال المستقيم المعني AB نمرر مستويا مساعدا S .
- ٢- نحدد خط تقاطع المستوي P مع المستوي المنشأ S والمتمثل في المستقيم MN .
- ٣- نحدد نقطة K تقاطع المستقيم AB مع خط تقاطع المستويين MN، وهي



شكل رقم (١٦٠)

في الوقت نفسه نقطة التقاطع المطلوبة . هذه القواعد نطبقها على المثال الذي

يوضحه الشكل (١٦٠) : لدينا المستقيم FK

المتقاطع مع المستوي المحدد بالمستقيمين المتقاطعين AB و CD والمطلوب تحديد نقطة تقاطع المستقيم FK مع المستوي .

لهذا الغرض نمرر من المستقيم FK

مستويا اسقاطيا أماميا S ينطبق أثره الأمامي S_v على المسقط الأمامي $f'k'$ للمستقيم .