الفصل الخامس :

# المستوي

العناصر الهندسية التي تحدد المستوي في الفراغ .

تحديد المستوي على مستويات الاسقاط .

الحالة العامة للمستوي .

آثار المستوي .

الحالات الخاصة لوضع المستوي الفراغي .

العناصر الهندسية الواقعة في المستوي .

المستقيمات الخاصة في المستوي .

العلاقة بين العناصر الهندسية الواقعة في المستوي وآثاره.

الجامعة السورية الخاصة
SYRIAN PRIVATE UNIVERSITY

## ٧ ـ١ـ العناصر الهندسية التي تحدد المستوي في الفراغ :

يمكن أن يتحدد المستوي في الفراغ بالعناصر الهندسية التالية :

١ـ ثلاث نقاط غير واقعة على استقامة واحدة ( مبعثرة ) .

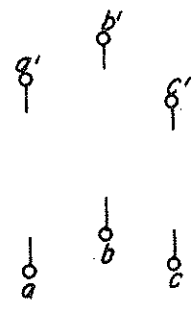
٢ـ مستقيم ونقطة غير واقعة عليه أو على امتداده .

٣ـ مستقمين متقاطعين .

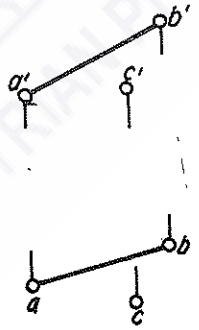
٤ـ مستقيمين متوازيين .

## ٧ ـ٢ـ تحديد المستوي على مستويات الاسقاط :

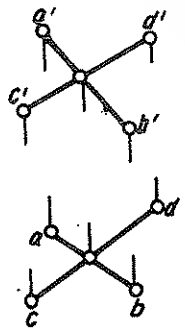
لما كان من الممكن تحديد المستوي فراغيا باحدى الحالات المذكورة في الفقرة السابقة ، فان تعبيره الاسقاطي يتم من خلال التعبير الاسقاطي لعناصر هذه الحالات ، أي :




شكل رقم (٩٥)




شكل رقم (٩٦)



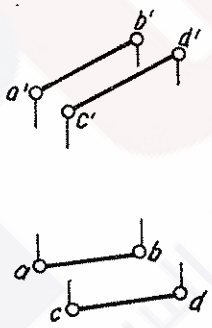

شكل رقم ( ٩٧)

١ـ تحديد مساقط النقاط الثلاث المبعثرة التي تحدده ( الشكل ٩٥ ) .

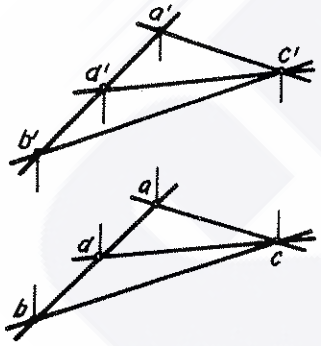
٢ـ تحديد مساقط المستقيم والنقطة الخارجة عنه المحددة للمستوي ، الشكل ( ٩٦ ) .

٣ـ تحديد مساقط المستقيمين المتقاطعين ( الشكل ٩٧ ) أو المتوازيين المحددين للمستوي ( الشكل ٩٨ ) .

ومن خلال العناصر الهندسية المحددة للمستوي ، يمكن أيضا تحديد المستوي بشكل هندسي محدد . مثلا : اذا مررنا من النقاط A ، B و C المحددة للمستوي في الشكل ( ٩٥ ) مستقيمات فاننا نحصل على شكل هندسي محدد يتمثل بالمثلث A B C الذي يبين الشكل ( ٩٩ ) مسقطيه .



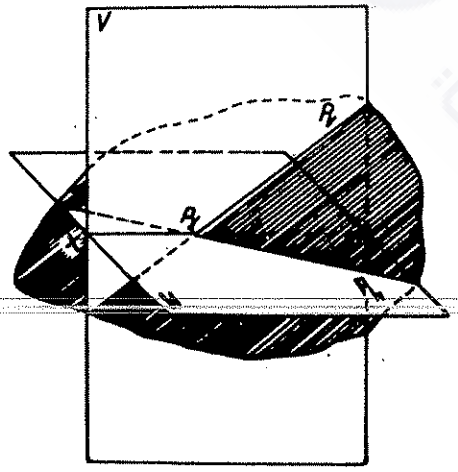

شكل رقم ( ٩٨ )




شكل رقم ( ٩٩ )

## ٧ ـ٣ـ الحالة العامة للمستوي ( المستوي الكيفي ) :

يميل المستوي كيفيا بالنسبة لمستويات الاسقاط ، ويقطع في هذه الحالة مستويات الاسقاط بمستقيمات تميل في زاوية كيفية بالنسبة لمحاور الاسقاط ( الشكل ١٠٠ ) .

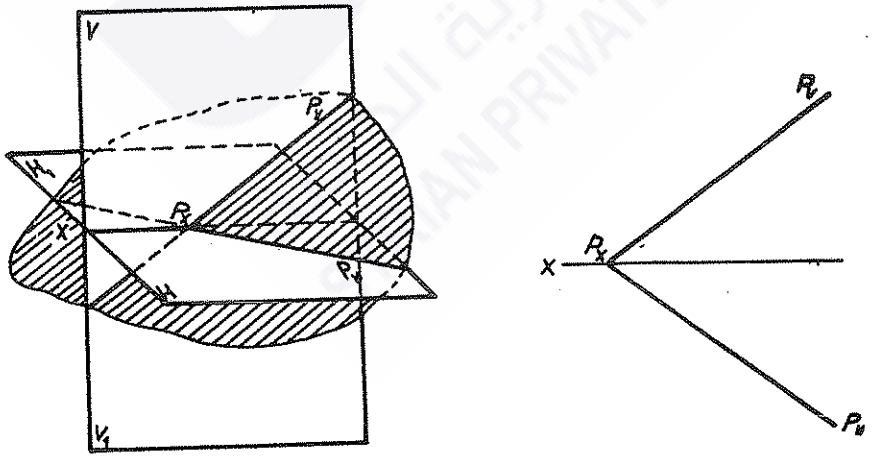



شكل رقم (١٠٠)

نلاحظ من خلال الشكل السابق أن خطوط تقاطع المستوي المعني مع مستويات الاسقاط تلتقي في نقطة واحدة على محور الاسقاط المشترك بين مستويي الاسقاط الأمامي والأفقي ٠

## ٧ ـ٤ـ آثار المستوي :

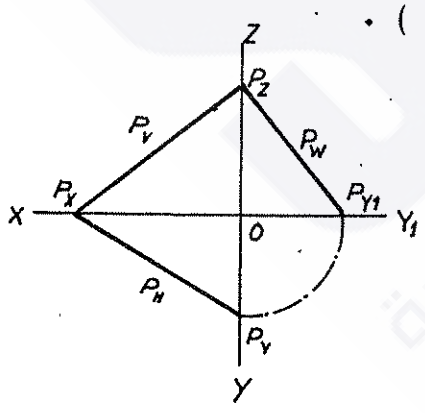
يسمى خط تقاطع مستو ما مع مستوي الاسقاط المعني بأثر المستوي ، ويسمى الأثر باسم مستوي الاسقاط المتقاطع معه ٠ ولذلك يسمى خط التقاطع مع مستوي الاسقاط الأفقي بـ ( الأثر الأفقي ) ، ويسمى خط التقاطع مع مستوي الاسقاط الأمامي بـ ( الأثر الأمامي ) ومع مستوي الاسقاط الجانبي بـ ( الأثر الجانبي ) ٠ وهذه الآثار ـ كما ذكرنا في الفقرة السابقة ـ تتقاطع مع محور الاسقاط المشترك بين مستويي الاسقاط في نقطة واحدة ويمثل تعبيرها الاسقاطي المستوي الثنائي مستقيمين متلاقيين ( متقاطعين ) في نقطة واحدة من محور الاسقاط ( الشكل ١٠١ ) ٠ ومن هنا نلاحظ أن المستوي يمكن أن يحدد بآثاره ( وبتعبير أدق نقول : بمساقط آثاره على مستويات الاسقاط ) ٠



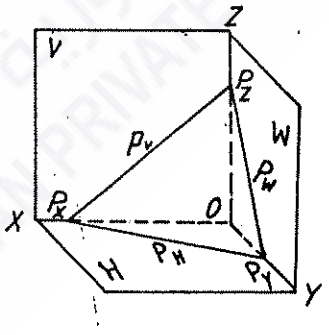

شكل رقم ( ١٠١ )

ومن خلال هذا الشكل نلاحظ أن الزاوية المحصورة بين الأثرين فراغيا لاتساوي الزاوية المحصورة بينهما في التعبير الاسقاطي المستوي ، وأن نقطة تلاقي الآثار في الشكل ( ١٠١ آ ) تمثل قمة زاوية ثلاثية الحواف ، ونحن نعلم أن مجموع زاويتين مستويتين ( سطحيتين ) للزاوية الثلاثية الحواف يكون أكبر من الزاوية المستوية ( السطحية ) الثالثة ولذلك نجد أن الزاوية المحصورة بين الأثرين $P_v$ و $P_h$ في التعبير الاسقاطي المستوي ( الشكل ١٠١ ب ) تكون دائما أكبر من الزاوية المحصورة بينهما فراغيا ( الزاوية المخططة في الشكل ١٠١ آ ) ٠

يقطع المستوي في حالته العامة ، في التعبير الاسقاطي الثلاثي ، مستويات الاسقاط الثلاثة تاركا عليها آثاره الثلاثة الأفقي والأمامي والجانبي وقاطعا محاور الاسقاط في نقاط تمثل نقاط التقاء الآثار المتجاورة ومكونا في الثمن الفراغي المار منه مستويا هندسيا محددا بشكل مثلث تمثل أضلاعه آثار المستوي ( الشكل ١٠٢ ) ٠ وتتخذ آثاره في التعبير الاسقاطي المستوي الثلاثي الأوضاع الموضحة في الشكل ( ١٠٣ ) ٠




شكل رقم (١٠٣)




شكل رقم (١٠٢)

ولما كانت النقاط $P_x$ ، $P_y$ و $P_z$ تقع على محاور الاسقاط Y,X و Z ـ كما هو واضح في الشكل (١٠٢) ـ يكفينا لرسم صورة المستوي

## V ـ ٦ـ العناصر الهندسية ( المستقيم والنقطة ) الواقعة في المستوي :

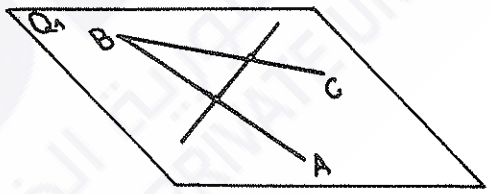
ان تحديد ورسم مستقيم واقع في مستو يعتمد على موضوعتين معروفتين من موضوعات الهندسة :

احداهما : يقع المستقيم في مستو اذا كان يمر من نقطتين واقعتين في المستوي ٠

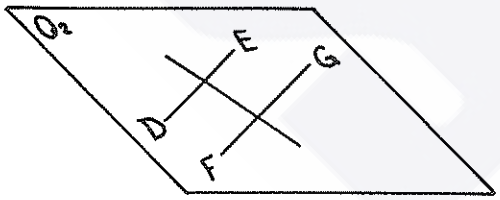
والأخرى : يقع المستقيم في مستو اذا كان يمر من نقطة واقعة في المستوي ويوازي مستقيما واقعا في المستوي نفسه أو موازيا له ٠

ومن المنطلقين نفسهما نجد أن النقطة الواقعة على أي مستقيم يحدد المستوي أو ينتمي اليه تقع في هذا المستوي ٠

لنفترض أن المستوي $Q_1$ في الشكل ( ١١١ ) محدد بمستقيمين متقاطعين AB و CB ، وأن المستوي $Q_2$ في الشكل ( ١١٢ ) محدد بالمستقيمين DE و FG ٠



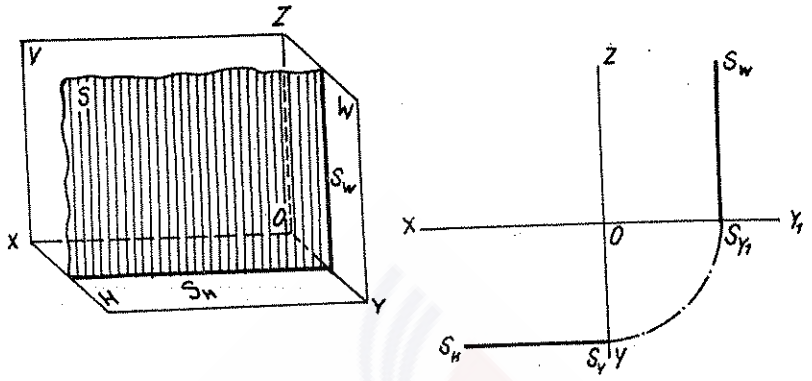

شكل رقم (١١١)




شكل رقم (١١٢)

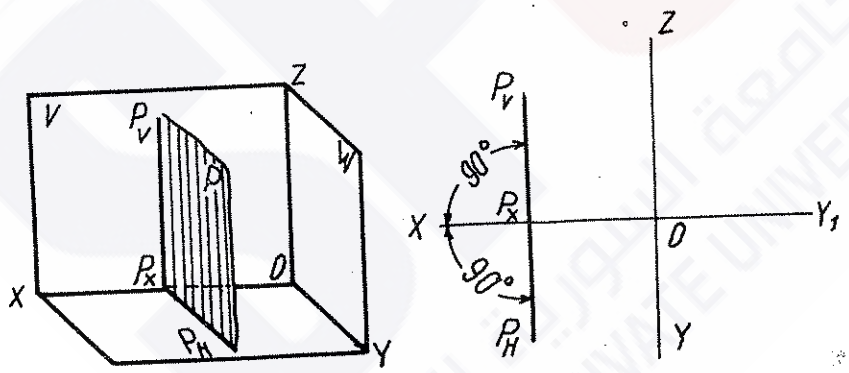
ان أي مستقيم يقطع المستقيمين AB و CB ( ماعدا المستقيم المتقاطع معهما في نقطة B ) يمر من نقطتين واقعتين في المستوي Q ، وحسب الموضوعة الأولى يجب أن يقع في هذا المستوي ٠

وان المستقيم المتقاطع مع المستقيمين DE و FG يقع في المستوي $Q_2$ ، لأنه يمر من نقطتين واقعتين فيه ٠




**شكل رقم (١٠٩)**

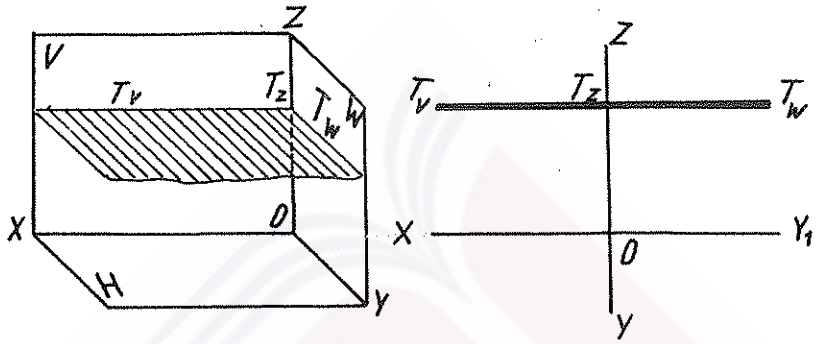
الاسقاط الجانبي يتم بأشكالها وقياساتها الحقيقية. ولهذا المستوي أثران اثنان ، هما : الأفقي والأمامي ، يكونان عموديين على محور (OX) ( خط الأرض ) الشكل ( ١١٠ ) .




**شكل رقم (١١٠)**

ويمثل هذا المستوي حالة خاصة تجمع الحالتين ( V ـ ٥ ـ ١ ) و ( V ـ ٥ ـ ٢ ) معا .

ويمكن أن يعد هذا المستوي حالة خاصة تجمع الحالتين ( ٧ ـ ٥ ـ ٢ و ( ٧ ـ ٥ ـ ٣ ) معا ٠




شكل رقم (١٠٨)

## ٧ ـ ٥ ـ ٥ ـ مستوي التطابق الأمامي ( المستوي الموازي لمستوي الاسقاط الأمامي ) :

تُسّقط جميع العناصر الهندسية الواقعة في هذا المستوي، على مستوي الاسقاط الأمامي دون أن يحدث أي تشوه في الشكل أو في القياسات ٠ ولهذا المستوي أثران اثنان هما الأفقي والجانبي ، يكونان عموديين على محور الاسقاط (OY) ( الشكل ١٠٩ ) ٠

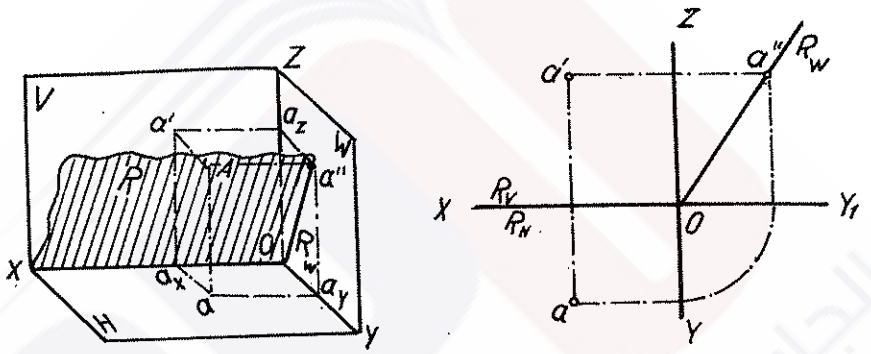
ويعد هذا المستوي حالة خاصة تجمع الحالتين ( ٧ ـ ٥ ـ ١ ) و ( ٧ ـ ٥ ـ ٣ ) معا ٠

## ٧ ـ ٥ ـ ٦ـ مستوي التطابق الجانبي ( المستوي الموازي لمستوي الاسقاط الجانبي ) :

تُسّقط جميع العناصر الهندسية الواقعة في هذا المستوي على مستوي

يمر في حالة خاصة هذا المستوي من محور الاسقاط (OX) ( خط الأرض )، وبالتالي لانجد له الا أثرا جانبيا ( الشكل ١٠٧ ) ، وأما الأثران الأمـــــامي والأفقي فانهما ينطبقان على محور ( OX ) .

من خلال هذا الشكل نلاحظ أن المسقط الجانبي "a للنقطة A الواقعة في المستوي يقع على الأثر الجانبي لهذا المستوي وفي حالة الميل المتساوي له عن مستويي الاسقاط الأمامي والأفقي فانه يسمى بالمستوي المنصف .




**شكل رقم (١٠٧)**

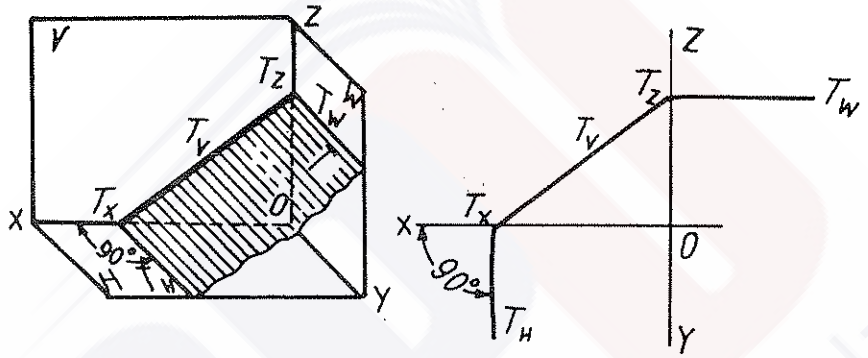
**وثمة** حالات أخرى يمكنأن تسمى بالأوضاع الخاصة بالحالات المذكـــــورة سابقا للمستوي .

## V ـ ٥ ـ٤ـ مستوي التطابق الأفقي ( المستوي الموازي لمستوي الاســـــقاط الأفـــــقي ) :

تعبر المساقط الأفقية لجميع العناصر الهندسية الواقعة في هـــــــذا المستوي عن أشكالها وقياساتها الحقيقية . ونجد أن لهذا المستوي أثريـــن اثنين هما الأمامي والجانبي ، يكونان عموديين على محور الاسقـــاط (OZ) ، وبتعبير آخر نقول : يكونان موازيين لخط الأرض ( الشكل ( ١٠٨ ) .

## ٧ ـ ٥ ـ٢ـ المستوي أمامي الاسقاط :

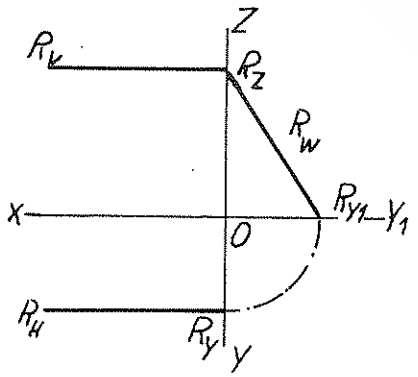
يكون عموديا على مستوي الاسقاط الأمامي V ، حيث تتطابق المساقط الأمامية لجميع العناصر الهندسية الواقعة فيه مع أثره الأمامي ٠ أما الأثران الأفقي والجانبي فانهما يكونان عموديين على محوري الاسقاط OX و OZ على التوالي ( الشكل ( ١٠٥ ) ٠

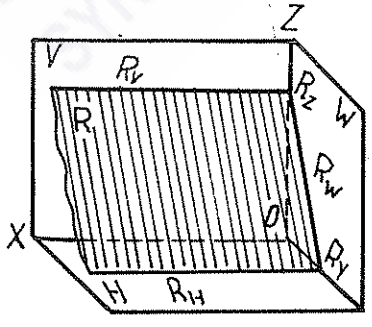



شكل رقم (١٠٥)

## ٧ ـ ٥ ـ٣ـ المستوي جانبي الاسقاط :

هذا المستوي يتعامد مع مستوي الاسقاط الجانبي ( W ) ويتطابق أثره الجانبي مع جميع المساقط الجانبية للعناصر الهندسية الواقعة فيه٠أماالأثران الأمامي والأفقي في الحالةالعامة فانهما يكونان عموديين على محوري الاسقاط (OZ)و (OY) الشكل ( ١٠٦ ) ٠




شكل رقم (١٠٦)

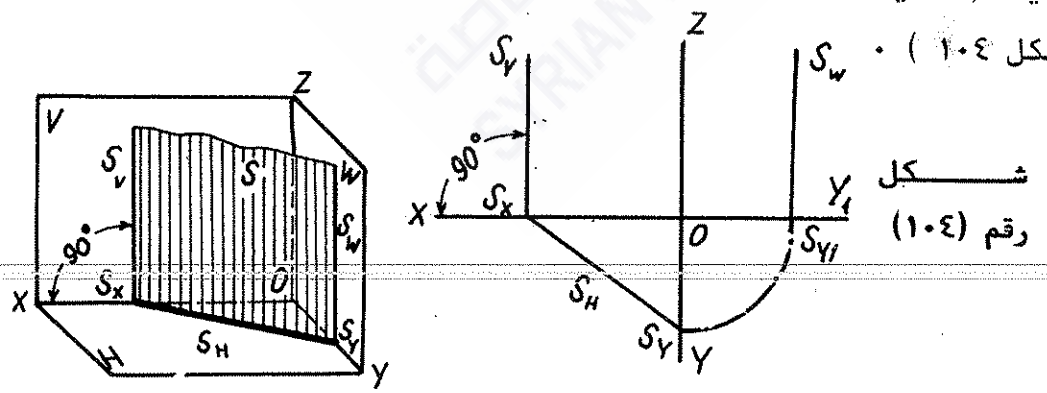
المعني في التعبير الاسقاطي الثلاثي أن نعرف طول مقاطع المستقيمات $OP_x$ ، $OP_y$ و $OP_z$ . وبتعبير آخر نقول : يكفي لذلك أن نعرف احداثيات النقاط $P_x$ ، $P_y$ و $P_z$ في التعبير الاسقاطي الثلاثي ، وعلميا يكفينا أن نعرف احدى احداثيات كل نقطة ، لأن قيمة كل من الاحداثيتين الأخريتين تساوي صفرا . فالنقطة $P_x$ احداثياتها (X, 0, 0) والنقطة $P_y$ احداثياتها ( 0,Y,0 ) والنقطة $P_z$ احداثياتها (0, 0, Z) .

## ٧ ـ ٥ ـ الحالات الخاصة لوضع المستوي الفراغي :

يكون المستوي في بعض الحالات في وضع خاص بالنسبة لأحد مستويات الاسقاط . فاذا كان عموديا عليه سمي بالمستوي الاسقاطي ، واذا كان موازيا له سمي بالمستوي التطابقي ( وهو في الوقت نفسه حالة خاصة بالمستوي الاسقاطي ، حيث يكون عموديا على مستويي الاسقاط الآخرين في آن واحد ) .

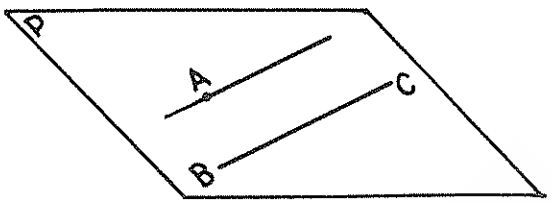
### ٧ ـ ٥ ـ١ـ المستوي أفقي الاسقاط :

يكون عموديا على مستوي الاسقاط الأفقي H حيث تقع جميع المساقط الأفقية لعناصر هذا المستوي على أثره الأفقي وتتطابق معه . أما الأثران الأمامي والجانبي فانهما يكونان عموديين على محوري الاسقاط OX و $OY_1$ ( الشكل ١٠٤ ) .




شكل رقم (١٠٤)

لنفترض أن لدينا المستوي P ( الشكل ١١٣ ) الذي حدد بالمستقيم BC والنقطة A . فحسب الموضوعة الثانية يكون المستقيم المار من النقطة A والموازي للمستقيم BC **أيضا** في المستوي P .

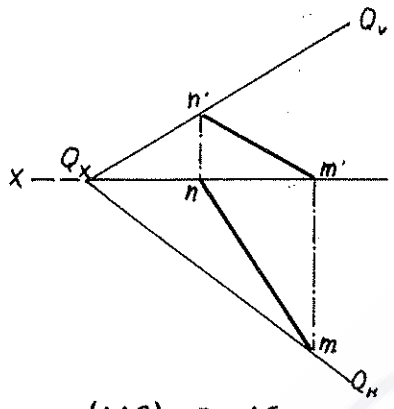



**شكل رقم (١١٣)**

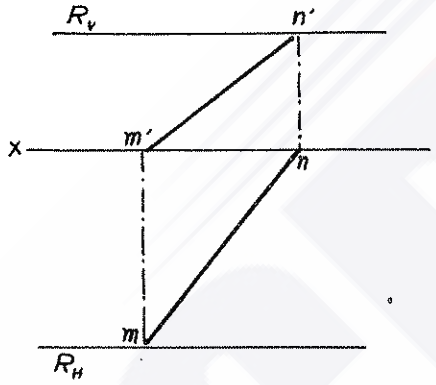
لاثبات ذلك نفترض أن المستقيم المار من النقطة A والموازي للمستقيم BC لايقع في المستوي P . نمرر من هذا المستقيم مستقيما يوازي المستقيم BC ويقطع المستوي P . ففي هذه الحالة نجد حسب بديهيات التوازي أن الفصل المشترك بين المستويين يوازي المستقيم BC ، ويمر من النقطة A لأنها احدى النقاط المشتركة بين المستويين ، الا أننا حسب بديهيات التوازي أيضا لايمكن أن نرسم أكثر من مستقيم واحد موازٍ لمستقيم آخر من نقطة واحدة خارجة عنه . ولذلك ينطبق المستقيم الأول على الفصل المشترك ويقع في المستوي P .

ان المناقشة السابقة للموضوعتين اللتين تحددان وضع العناصر الهندسية في المستوي المعني يمكن أن تعمم على آثار المستوي ، لأنها مستقيمات تحدده . فالحالة المدروسة في الشكل ( ١١١ ) يمكن أن تطبق على الشكل ( ١١٤ ) ، حيث يمثل أثرا المستوي $Q_h$ و $Q_v$ اللذان يحددانه مستقيمين متقاطعين في نقطة $Q_x$ واقعين فيه . وأما المستقيم MN فهو مستقيم يقطع هذين المستقيمين ( الأثرين ) في النقطتين M و N على التوالي وهما تمثلان في الوقت نفسه أثري المستقيم في مستويي الاسقاط H و V .

وأما الحالة التي يوضحها الشكل ( ١١٥ ) فهي تمثل حالة خاصة بالوضعية التي يوضحها الشكل ( ١١٢)، حيث نجد أن الأثرين $R_h$ و $R_v$ يمثلان مستقيمين متوازيين واقعين في المستوي ، وأن المستقيم MN يقطعهما في النقطتين M و N على التوالي، أي أنه يمر بنقطتين واقعتين في المستوي ، تمثلان في الوقت نفسه أثري المستقيم في المستويين H و V ٠

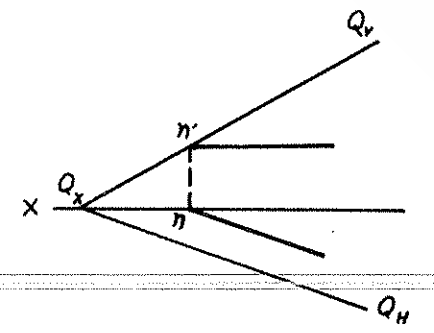



شكل رقم (١١٤)



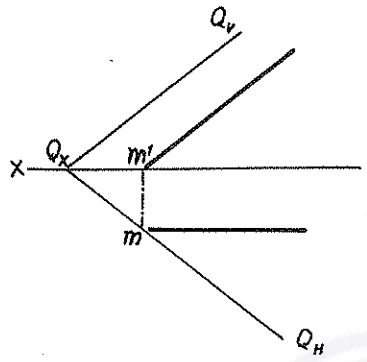

شكل رقم (١١٥)

وأما الشكلين ( ١١٦ ) و (١١٧ ) فهما يمثلان حالة خاصة لتطبيق الموضوعة الثانية ٠ ففي الشكل الأول ( ١١٦ ) نجد أن لدينا المستوي Q المحدد بمستقيم ( الأثر الأفقي $Q_h$ ) ونقطة خارجة عن هذا المستقيم N ( وتنتمي الى المستوي ، لأنها واقعة على مستقيم منتمي اليه ، وهو أثره الأمامي $Q_v$ ) ٠ وأما المستقيم NB المار من هذه النقطة فهو يوازي المستقيم الواقع في المستوي ( أثره الأفقي $Q_h$ ) ٠




شكل رقم ( ١١٦ )

وفي الشكل ( ١١٧ ) نجد أن لدينا المستوي Q المحدد بمستقيم ( الأثر الأمامي ) $Q_v$ ونقطة خارجة عنه M ( تقع في المستوي لأنها واقعة على أثره الأفقي $Q_h$ ) وأن المستقيم MB يمر من هذه النقطة ويوازي المستقيم ( الأثر الأمامي $Q_v$ ) .



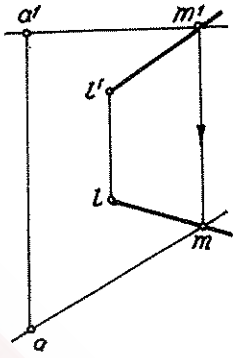

**شكل رقم (١١٧)**

**لذلك** نجد في هاتين الحالتين أن المستقيمين NB و MB واقعان في مستويي النقطتين N و M على التوالي.

ان عرض هذه الحالات الخاصة لايعني أنه يجب علينا أن نوجد آثار المستوي لرسم مستقيم أو نقطة واقعة في هذا المستوي . ففي حالات كثيرة لايتطلب تنفيذ ذلك أن نرسم آثار المستوي . ولتأكيد ذلك نورد الأمثلة التالية :

**المثال الأول :**

الشكل (١١٨) يوضح طريقة رسم المستقيم AM في المستوي المحدد بالنقطة A والمستقيم المار من النقطة L . لنفترض أن المستقيم AM مطلوب رسمه بشكل يوازي مستوي الاسقاط الأفقي H . نرسم مستقيما أفقيا ( عموديا على خط الاسقاط 'aa ) من المسقط الأمامي 'a للنقطة A ، فيقطع المسقط الأمامي للمستقيم المار من النقطة L ( أي المستقيم المار من مسقطها الأمامي 'L ) في النقطة 'm . نوجد المسقط الأفقي m على المسقط الأفقي للمستقيم المار من النقطة L ( أي المستقيم المار من مسقطها الأفقي L ) ، وذلك بانزال مستقيم شاقولي من 'm فيقطع المستقيم

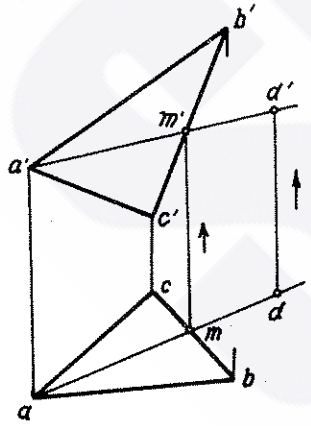



شكل رقم (١١٨)

المار من النقطة L في نقطة m . وحين نصل النقطة A بالنقطة m نحصل على المسقط الأفقي am . ان المستقيم AM ، الذي يوضحه الشكل (١١٨) بمسقطيه الأفقي am والأمامي a'm' يقع في المستوي المحدد بالنقطة M والمستقيم المار من L ، لأنه يحقق الموضوعة الأولى ، أي يمر من نقطتين **واقعتين** في المستوي وهما A و M .

**المثال الثاني :**

أوجد المسقط الأمامي للنقطة D ، اذا كان مسقطها الأفقي معلوما وكانت واقعة في المستوي المحدد بالمثلث ABC ، الشكل ( ١١٩ ) .




شكل رقم (١١٩)

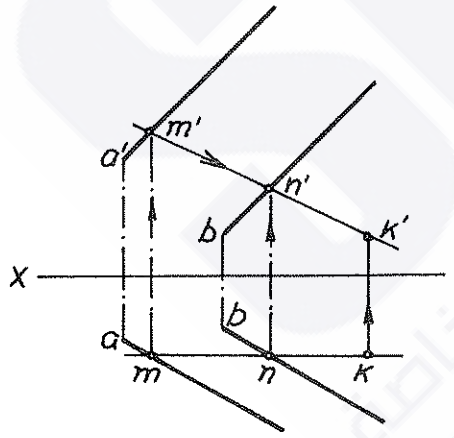
قبل كل شيء نقول : حتى تكون النقطة واقعة في مستو لابد أن تقع على أحد المستقيمات الواقعة فيه ، ولذلك نرسم أولا المسقط الأفقي لمستقيم ما يمر بالنقطة D ويقع في المستوي المعني . وبهذا **نرسم** مستقيما يمر من النقطتين a و d ، فيقطع المستقيم bc في النقطة m . هذا المستقيم يمثل المسقط الأفقي للمستقيم المطلوب الذي يمر ـ حسب الموضوعة الأولى ـ من نقطتين واقعتين في المستوي وفي الوقت نفسه يمر من النقطة المعنية .

ولايجاد المسقط الأمامي لهذا المستقيم نقوم بتحديد المسقط الأمامي 'm للنقطة M ، ونمرر منها ومن 'a مستقيما • وحتى تكون النقطة D واقعة على هذا المستقيم يجب أن يقع مسقطها الأمامي 'd على مسقطه الأمامي 'a'm • ولهذا نمدد 'a'm ، ونقيم من نقطة d مستقيما شاقوليا حتى يتقاطع مع امتداد 'a'm • نقطة التقاطع هذه هي المسقط الأمامي 'd المطلوب •

**المثال الثالث :**

ان النقطة K تقع في المستوي Q المحدد بالمستقيمين المتوازيين AB و CD ( الشكل ١٢٠ ) والمطلوب أن نحدد مسقطها الأمامي اذا كان مسقطها الأفقي معلوما •

لما كانت النقطة K واقعة في المستوي Q فهي تقع على مستقيم واقع في المستوي ، وعلى هذا الأساس نمرر من مسقطها الأفقي K مستقيما يقطع المسقطين ab و cd للمستقيمين اللذين يحددان المستوي Q في النقطتين e و f على التوالي • وبعد ذلك نحدد المساقط الأمامية 'e و 'f ونمرر منها مستقيما يمثل المسقط الأمامي للمستقيم المار من النقطة K والواقع في المستوي Q • ولما كان هذا المستقيم يمر من النقطة K فان مساقطها تقع على المساقط المتماثلة للمستقيم ، وهو ماتحقق بالنسبة للمسقط الأفقي ، أما المسقط الأمامي فيكفي اقامة مستقيم




**شكل رقم (١٢٠)**

ساقولي من النقطة K حتى يتقاطع مع المستقيم e'f' . نقطة التقاطع هذه تمثل المسقط الأمامي K' للنقطة K ، وهو المطلوب .

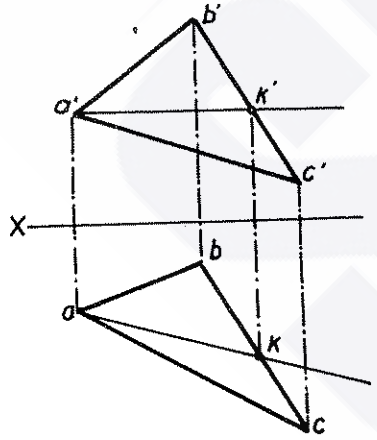
## V – ٧– المستقيمات الخاصة في المستوي :

هنالك بعض الأوضاع الخاصة بالمستقيمات التي تقع في المستوي وتأخذ تسميات محددة ، وهي : أفق المستوي وجبهة المستوي ، وجانب المستوي في حالة التعبير الاسقاطي الثلاثي ، وخط الميل الأكبر .

### V –٧–١– أفق المستوي :

هو المستقيم الأفقي ( الموازي لمستوي الاسقاط الأفقي H ) الذي يقع في المستوي المعني .

**مثال ١ :**




شكل رقم (١٢١)

**ارسم** أفق المستوي المحدد بالمثلث ABC والمار من أحد رؤوسه .

**الحل :** ان المستقيم المطلوب هو مستقيم موازٍ لمستوي الاسقاط الأفقي H ولهذا يكون مسقطه الأمامي موازيا لخط الأرض ( في الاسقاط الشامل يكون مستقيما أفقيا ) . ولرسم هذا المسقط يكفينا أن نفرق نقطة واحدة من نقاطه،الا أننا نحتاج عند رسم المسقط الأفقي الى نقطتين على الأقل ، تحددان وضعه الفراغي. ولذلك لايمكننا أن نرسم المسقط الأمامي لهذا المستقيم من النقطة B أو من النقطة C ( الشكل ١٢١ ) . والسؤال المطروح هنا : لماذا ؟ . وعلى ذلك