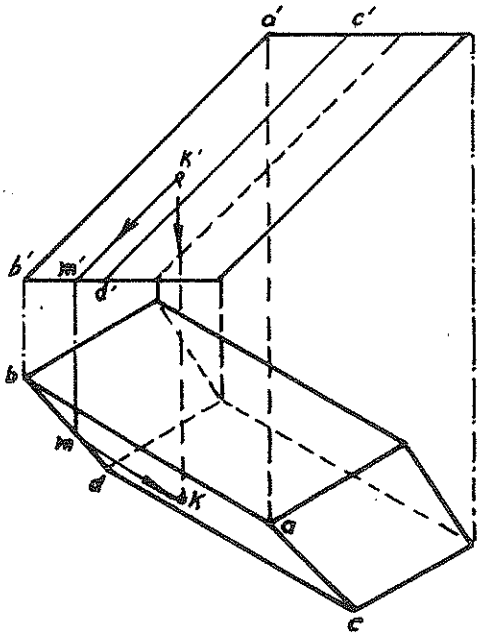
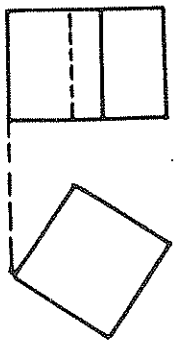
في بعض الحالات،يكفي التعبير المستوي الاسقاطي الثنائي في تحديد شكل الجسم الهندسي المتعدد السطوح ووضعه ، كما هو الحال في مساقط الأجسام التي توضحها الأشكال (١٩٥ و ١٩٦ و ١٩٧) ٠



شكل رقم (١٩٧)

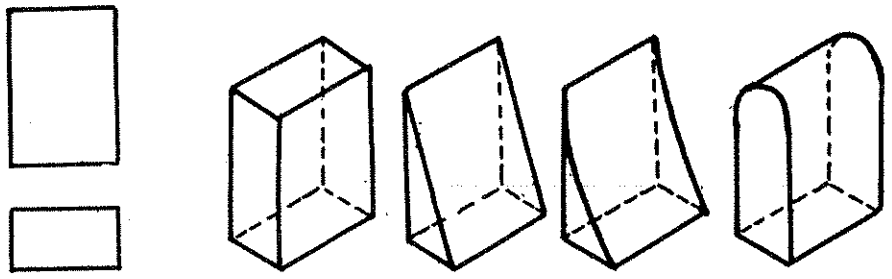


شكل رقم (١٩٦)

لدينا في الشكل (١٩٥) موشور مثلث قائم ، وفي الشكل (١٩٦) مكعب يدل على أنه مكعب تساوي أضلاعه وتعامد حوافه ، وفي الشكل (١٩٧) موشور رباعي مائل ٠

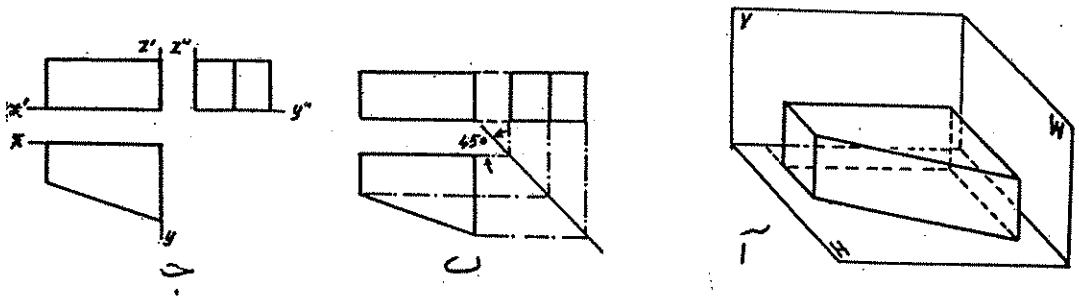
وفي حالات أخرى يكون هذا التعبير غير كاف لاعطاء الصورة الحقيقية والفعلية للجسم المعني ٠ مثلا : في الشكل (١٩٨) نجد أن المساقط يمكن أن تكون لأي جسم من الأجسام المجاورة لها ٠ وفي هذه الحالات لابد أن تحدد الصورة من خلال التعبير المستوي الاسقاطي الثلاثي ٠

لدينا في الشكل (١٩٩ آ) موشور ناقص رباعي الزوايا تمثل سطوحه



شكل رقم (١٩٨)

الأفقية قاعدتيه العليا والسفلى • والشكل (١٩٩ ب) يوضح تعبيره المستوي الاسقاطي الثلاثي المرسوم بمساعدة مستقيم منصف مساعد دون استخدام محاور الاسقاط • والشكل (١٩٩ ج) يوضح أن المساقط مرسومة باحداثيات كل مستو من مستويات الاسقاط ، وبتعبير آخر نقول : انها مرسومة بفارق احداثيات سطوح متعدد السطوح هذا ، أي : الموشور الرباعي الناقص ، كما بيناّ ذلك في الفقرة (VII-١-٢) •

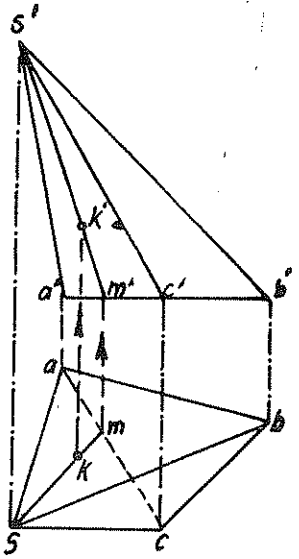


شكل رقم (١٩٩)

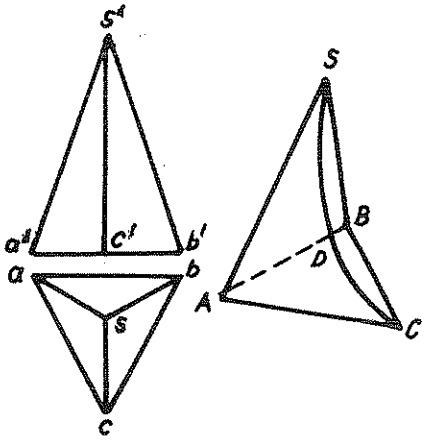
ولتمثيل الهرم يجب أن نحصل على شكل سطوحه الجانبية ونقطة تقاطعها (قمته) • وبشكل عام نعبر عن الهرم برسم مساقط قاعدته وقمته • وأما الهرم الناقص فان مساقط قاعدتيه العليا والسفلى يجب أن ترسم بفضل اختيار الوضعية الملائمة لتمثيل الهرم على أساس وضع قاعدته التي توازي

أحد مستويات الاسقـاط ٠

يوضح الشكل (٢٠٠) التعبير المستوي الاسقاطي الثنائي لهرم مثلث غيـر



شكل رقم (٢٠٠)



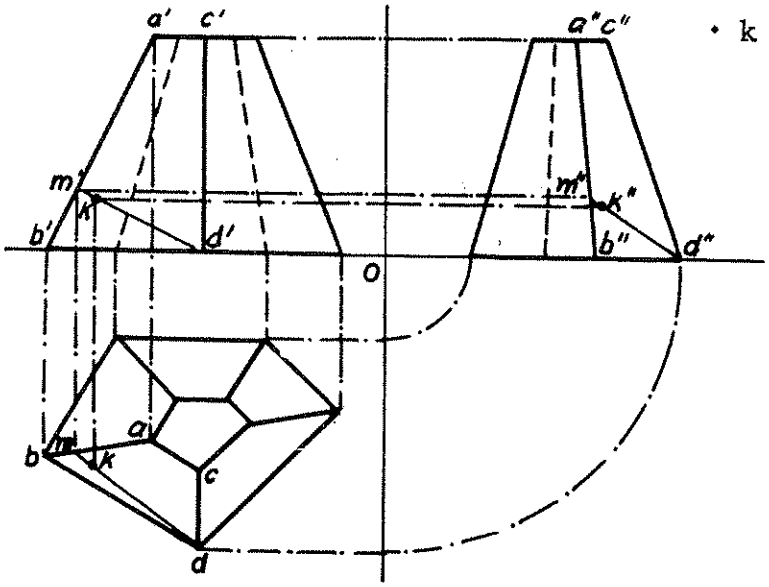
شكل رقم (٢٠١)

منتظم قاعدته توازي مستوي الاسقاط الأفقي H ٠ ونلاحظ أن هذا التعبير كاف لتصوير وضعية الهرم وشكله ٠ ومع ذلك نجد أن ثمة حالات يتضح من خلالهـا عدم كفاية هذا التعبير لاعطاء الصورة الحقيقية للجسم الهرمي ٠ مثـلا : في التعبير الاسقاطي الذي يوضحه الشكل (٢٠١) يغدو من الصعب أو من الخطـأ التأكيد على أن هذه المساقط تمثل هرما بالذات ٠ ففي هذا التعبير يبـقى غير واضح شكل وطبيعة الخطوط الواقعة في الوجه الجانبي من الجسم ٠ فمـن الممكن أن تمثل هذه الخطوط حروفا منحنية ، وبالتالي لن تكون السـطوح المحددة بها سطوحا مستوية ، كما هو واضح من الجسم المنظور في الشكـل نفسه ٠ وفي مثل هذه الحالة تكون الكلمة الحاسمة للمسقط الجانبي من هـذا الشكل ٠

VII ـ٤ـ العناصر الهندسية الواقعة على سطوح (أوجه) الجسم متعـــدد

الســـطوح المســـتوية :

لايجاد موقع نقطة ما واقعة على أحد سطوح الجسم المتعدد السطـــوح المستوية لابد أن نربط مساقط هذه النقطة مع مساقط السطح الواقعة فيه ومع مساقط حروفه بواسطة مستقيم مساعد • مثلا : في الشكل (١٩٧) تقـــع النقطة K على السطح AB CD من الموشور الرباعي المائل • واذا ماافترضنا أن لدينا المسقط الأمامي للنقطة k' ، فان المطلوب ايجاد مسقطهـــا الأفـــقي k •



شكل رقم (٢٠٢)

لأجل ذلك نمرر من النقطة K مستقيما واقعا في المستـــوي ABCD وموازيا لأحد حروفه ، وليكن AB ، فيقطع هذا المستقيم الحرف BD فـــي النقطة M • ولذلك نرسم مسقطه الأمامي m'k' ، ونوجد للنقطة M مسقطها الأفقي m الواقع على المسقط الأفقي bd للحرف BD • ومن النقطـــة m

نرسم مستقيما موازيا لـ ab المسقط الأفقي للحرف AB ، وبعد ذلك نوجد المسقط الأفقي k للنقطة K من تقاطع mk مع الشاقول المرسوم من نقطة k' ٠

يمكن استخدام الطريقة ذاتها في ايجاد (تمثيل) نقطة واقعة على أحد السطوح الجانبية لهرم ٠

يوضح الشكل (٢٠٠) طريقة تمثيل النقطة K الواقعة على السطح ASC من الهرم ٠ فاذا فرضنا أن لدينا المسقط الأفقي k لهذه النقطة فان المطلوب ايجاد مسقطها الأمامي k' لاستكمال تمثيلها ٠

ولهذا الغرض نمرر من قمة الهرم S على السطح (الوجه) S A C مستقيما يمر بالنقطة K فيقطع حرف القاعدة AC في نقطة M ٠ ونرسم المسقط الأفقي لهذا المستقيم بوصل النقطتين s و k ونمدده حتى يقطع ac فنحصل على النقطة m ، وهي المسقط الأفقي للنقطة M ٠ نوجد المسقط الأمامي m' لهذه النقطة ، ونوصل m' و s' فنحصل على المسقط الأمامي للمستقيم المساعد s'm' ، وبعد ذلك نحدد عليه المسقط الأمامي k' للنقطة المطلوبة ٠

بالطريقة نفسها يمكن ايجاد مساقط النقطة K الواقعة على السطح (الوجه) ABCD من الهرم الخماسي الناقص (الشكل ٢٠٢) والمعطى بمساقطه في التعبير المستوي الاسقاطي الثلاثي ٠

يجب أن نلاحظ في جميع الحالات السابقة أن المستقيم المساعد المستخدم هو مستقيم كيفي يمكن أن نختاره ، وهو في أي وضع كان ، بحيث يمكننا ذلك من ايجاد أبسط الحلول وأسرعها ٠

مثـــال :

هرم ثلاثي منتظم ، قاعدته توازي مستوي الاسقاط الأفقي H ، وهـــو محدد في التعبير المستوي الاسقاطي الثلاثي ، تخترقه فتحة موشوريـــــة ، مسقطها الأمامي محدد • استكمل تمثيل هذه الفتحة (الشكل ٢٠٣) .

الحـــل :

لاستكمال تمثيل الفتحة يجب ايجاد مسقطيها الأفقي والجانبي ، وقبـل البحث عنها يجب أن نلاحظ أن كل نقطة من نقاط المسقط الأمامي للفتحـــة تمثل مساقط نقاط اختراق وجهين على الأقل من أوجه الهرم ، ولايجاد بقيـــة المساقط نقوم بمايلي :

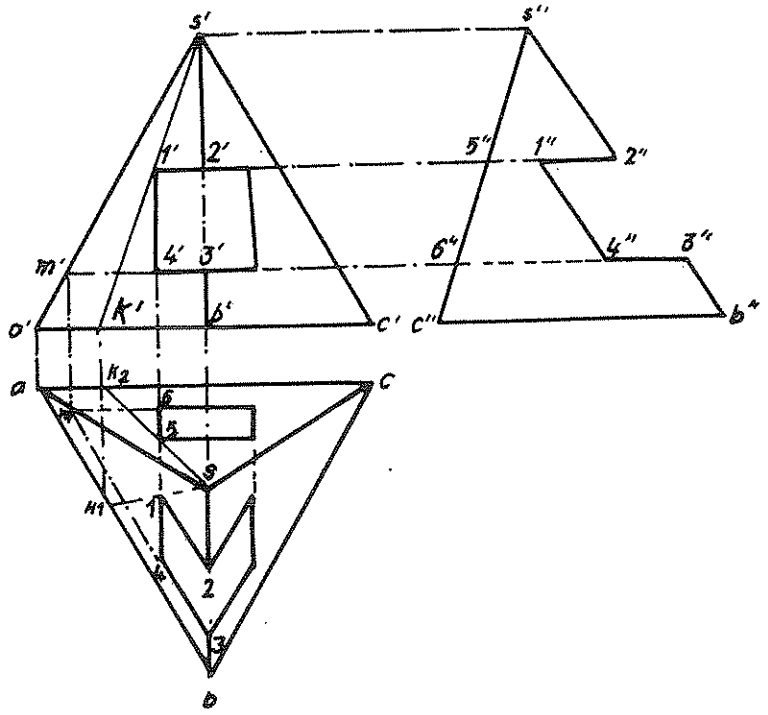
١ـ نمرر من مسقط قمة الهرم 's والنقطة '1 مستقيما فيقطع المسقطين 'a'b و'a'c في النقطة 'k ، ونحدد على المسقطين الأفقيين 'ab و ac المساقط الأفقية k_1 و k_2 •

٢ـ نوصل k_1 و k_2 بـ s ، فنحصل على المساقط الأفقية للمستقيمين المساعدين sk_1 و sk_2 ، ونحدد عليهما المساقط الأفقية للنقطتين 1 و 5 الحاصلتين من تقاطع الشاقول المنزل من نقطة '1 مع هذيـــن المستقيمين •

٣ـ نمرر من النقطتين '3 و '4 مستقيما يوازي مستوي الاسقاط الأفقـي H ، فيقطع الحرف 's'a في النقطة 'm ، ويمثل المسقط الأمـــامي لمستقيمين أفقيين واقعين في وجهي الهرم SAB و SAC • نوجـــد مسقطيهما الأفقيين بايجاد المسقط الأفقي m على sa ، ومن ثـــم نرسم منها مستقيمين يوازيان ac و ab ، لأن حروف القاعدة هـــي أيضا مستقيمات أفقية • ونحدد النقاط 3 و 4 و 6 من تقاطـــع

الشاقولين المنزلين من '3 و '4 مع هذين المستقيمين .

٤ـ النقطة 2 يمكن ايجادها بنفس الطريقة السابقة التي اتبعت في ايجاد النقطة 3 ، أو بمساعدة المسقط الجانبي .



شكل رقم (٢٠٣)

٥ـ يتم ايجاد المساقط الجانبية لهذه النقاط بتطبيق قواعد الاسقاط .

VII ـ ٥ ـ تقاطع الموشور أو الهرم مع مستو :

لرسم الأشكال الحاصلة من تقاطع الموشور أو الهرم مع مستو ، يجب التوصل الى أحد أمرين :

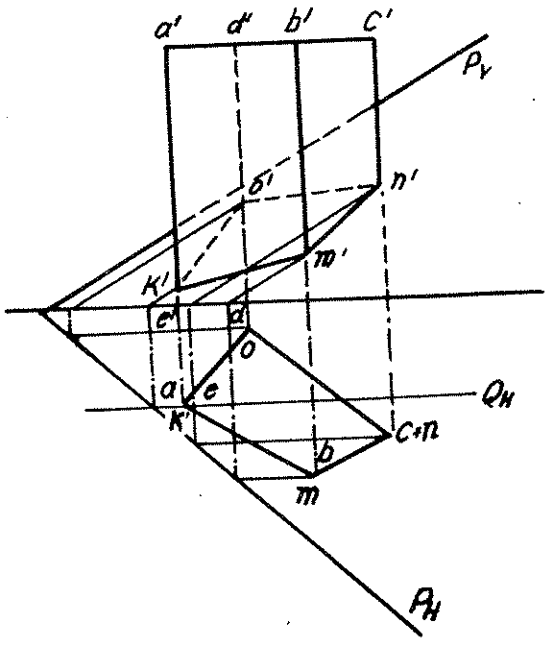
١ـ نوجد نقاط تقاطع حروف الموشور أو الهرم مع المستوي المعني ، في هذه الحالة نحصل على مسألة تقاطع مستقيم مع مستو تحل وفق القواعد التي تحددها .

٢ـ نوجد مقاطع مستقيمات الفصول المشتركة بين المستوي وكل من مستويات سطوح (أوجه) الموشور أو الهرم ، وفي هذه الحالة نحصل على مسألة تقاطع مستويات ، فتحل وفق القواعد التي تحددها أيضا .

في الحالات التي يكون المستوي المتقاطع في وضعية عامة تكون مساقط سطح التقاطع مشوهة شكلا وقياسا . واذا طلب ايجاد الشكل أو القياسات الحقيقية فالواجب أن نرجع الى احدى الطرق الموضحة في الفصول السابقة من هذا الكتاب لايجاد الوضعية والقياسات الحقيقية المطلوبة .

مثـــال :

حدد في التعبير الاسقاطي سطح تقاطع الموشور المنتظم القائم A B C D E F G'H مع المستوي P في حالته العامة والمحدد بأثريه (الشكل ٢٠٤).



شكل رقم (٢٠٤)

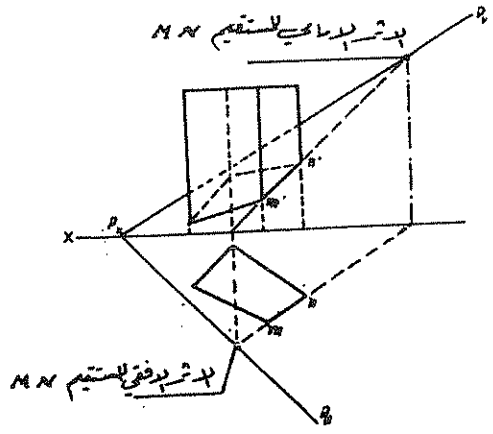
الحـــل :

اذا اتبعنا الطريقة الأولى فاننا سنتوصل الى حل يوضحه الشكل (٢٠٤) الذي يبين أن قاعدة الموشور القائم موازية للمستوي الاسقاط (في هذه الحالة موازية للمستوي H)، ولهذا يتطابق المسقط الأفقي لسطح التقاطع mnko مع المسقط الأفقي للموشور نفسه . ويبقى علينا ايجاد المسقط الأمامي لسطح التقاطع . ولما كانت نقاط رؤوس سطح التقاطع الرباعي الشكل : O و K و N و M تمثل نقاط

تقاطع أحرف الموشور مع المستوي P فان حل المسألة يتم على أساس ايجاد نقطة تقاطع مستقيم (حرف الموشور) مع المستوي P . لهذا الغرض نأخذ أحد الحروف ، وليكن الحرف AE ، ونمرر منه مستويا Q موازيا لمستوي الاسقاط الأمامي ، فيتقاطع مع المستوي P بمستقيم أمامي مسقطه الأفقي منطبق على الأثر الأفقي Q_h . نحصل على مسقطه الأمامي من خلال ايجاد أثره الأفقي و مسقطه الأمامي على خط الأرض ومن هذا المسقط نرسم مستقيما موازيا للأثر الأمامي P_v ، فيقطع a'e' في النقطة k' التي تمثل المسقط الأمامي لنقطة تقاطع الحرف AE مع المستوي P . وبالطريقة ذاتها نوجد المساقط الأمامية m' ، n' ، o' واذا ماوصلنا بينها بمستقيمات نحصل على المسقط الأمامي m'n'k'o' لسطح تقاطع الموشور مع المستوي P .

وفي الطريقة الثانية نجد أن تحديد المسقط الأمامي لسطح التقاطع يتم من خلال ايجاد الفصول المشتركة بين سطوح الموشور والمستوي P ،وبمعنى آخر نقول : نستخدم موضوعة تقاطع مستويين وتحديد فصلهما المشترك (الشكل ٢٠٥) .

نأخذ أحد حروف (أضلاع) المسقط الأفقي للموشور ، وليكن bc ، وهو في الوقت نفسه المسقط الأفقي mn لخط تقاطع المستوي P مع وجه (سطح) الموشور B C G F . وفي هذه الحالة نجد أن آثاره تقع على آثار المستوي P التي تناظرها .



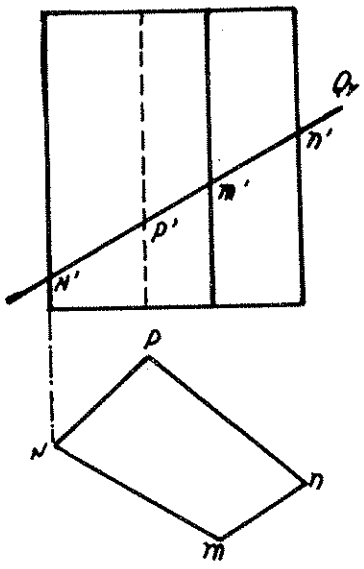
شكل رقم (٢٠٥)

ولذلك نمد mn حتى يقطع الاثر الافقي P_h للمستوي في نقطة h التي تمثل أثر المستقيم MN الأفقي • نوجد h' على خط الأرض • من جهة أخرى نمد mn حتى يقطع خط الأرض في النقطة v التي تمثل المسقط الأفقي للأثر الأمامي للمستقيم MN والذي يجب أن يقع على الأثر الأمامي للمستوي P_v ، ثم نوجد v' ، وبذلك نحصل على نقطتين للمسقط الأمامي لخط تقاطع المستوي مع هذا الوجه من الموشور ، ونوجد النقطتين n' و m' من تقاطع هذا المستقيم مع حروف المسقط الأمامي لوجه الموشور المعني •

نكرر هذه العملية بالنسبة لبقية حروف (أضلاع) المسقط الأفقي ، فنوجد المساقط الأمامية لخطوط تقاطع المستوي P مع بقية أوجه الموشور •

حالة خاصة :

اذا كان المستوي P المتقاطع مع الموشور عموديا على أحد مستويات الاسقاط تصبح مسألة ايجاد مساقط سطح التقاطع سهلة ومباشرة ، لاتحتاج الى عمليات اضافية أو استخدام عناصر هندسية مساعدة• مثلا : لدينا في الشكل (٢٠٦) موشور منتظم قاعدته توازي مستوي الاسقاط الأفقي H وهو يتقاطع مع مستوي اسقاطي أمامي Q •



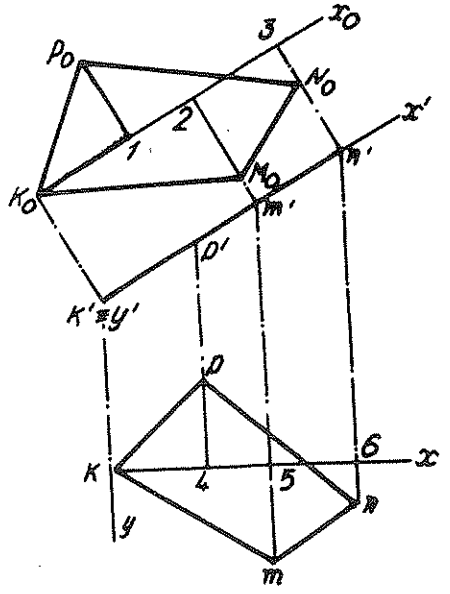
شكل رقم (٢٠٦)

ينطبق المسقط الأفقي لسطح التقاطع كماهو واضح في المثال السابق على المسقط الأفقي للموشور نفسه ، وينطبق المسقط الأمامي لهذا السطح على الأثر الأمامي P_v للمستوي ، وتمثل نقاط

تقاطع هذا الأثر مع المسقط الأمامي لحروف الموشور رؤوس هذا السطح .

لايجاد الشكل الحقيقي لسطح تقاطع المستوي Q مع الموشور هنـــــاك طريقة (بالاضافة الى الطرق المذكورة في الفصول السابقة من هذا الكتاب)، يمكن تلخيصها بالخطوات التالية التي يوضحها الشكل (٢٠٧) :

١ـ نرسم من احدى نقاط المسقط الأفقي لسطح التقاطع ، ولتكن النقطة k ، محاور احداثية ، أحدها KX يوازي مستوي الاسقاط الأمامي والآخر KY يعامد هذا المستوي .



شكل رقم (٢٠٧)

٢ـ نفترض أن المسقط الأمـــامي k'x' للمحور KX يتخذ الوضعية التـــي يوضحها الشكل (وهي الوضعيـــة الحقيقية الفراغية للمحور). أمـــا المسقط الأمامي للمحور KY(k'y') فتمثله نقطة واحدة لأنه عمودي على المستوي V .

٣ـ نرسم المستقيم K_oX_o موازيا لـ k'x' ، وذلك على مسافة كيفية منه.

٤ـ نأخذ من النقطة K_o على المستقيم K_oX_o المسافات :

$K_o\,1 = k'p'$ و $K_o\,2 = k'm'$ و $K_o\,3 = k'n'$.

٥ـ نقيم من النقاط 1 و 2 و 3 أعمدة على K_oX_o ونحدد عليهـــا المسافات : $P_o\,1 = p\,4$ و $M_o\,2 = m\,5$ و $N_o\,3 = n\,6$.

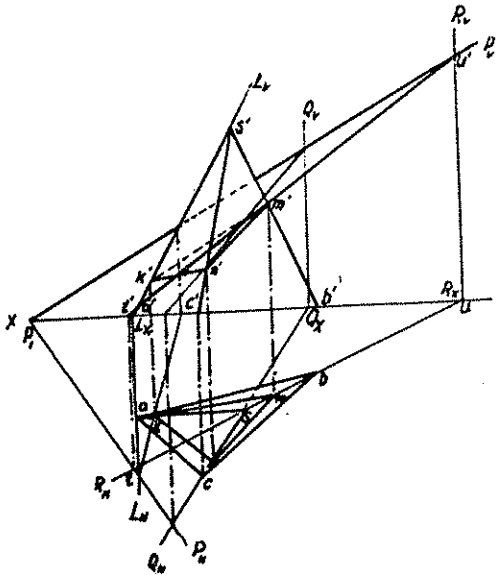
٦ـ نوصل بين النقاط K_o و P_o و N_o و M_o على التوالي ، فنحصل علـــى الشكل $K_oP_oN_oM_o$ الذي يمثل الشكل الحقيقي لسطح التقاطع بيـــن

المستوي Q والموشور .

ندرس الآن حالة تقاطع مستو في الحالة العامة مع هرم ثلاثي قائم (الشكل ٢٠٨) ويوضحها المثال التالي:

مثال ٢ : ارسم مساقط سطح تقاطع الهرم القائم SABC مع المستوي P في حالته العامة .

الحل : لتعيين سطح التقاطع نحدد ـ كما ذكرنا سابقا ـ نقاط تقاطع حروف (أضلاع) الهرم مع المستوي P .



شكل رقم (٢٠٨)

(ملاحظة : الشكل منفذ بافتراض أن المستوي P شفاف) .

لايجاد نقطة تقاطع الحرف SB للهرم مر المستوي P نمرر من SB مستويا اسقاطيا أفقيا R (أي نتبع نفس الطريقة المتبعة في ايجاد نقطة تقاطع مستقيم مع مستو في الحالة العامة) ، آثراه R_h و R_v . يتقاطع هذا المستوي مع المستوي P بالمستقيم TU (ينطبق مسقطه الأفقي tu على المسقط الآفقي sb لحرف الهرم وينطبقان معا على الأثر الأفقي R_h للمستوي المساعد) ، فنحصل من تقاطع المسقط الأمامي t'u' مع المسقط الأمامي s'b' على المسقط الأمامي m' لنقطة تقاطع M حرف الهرم SB مع المستوي P . وبعد ذلك نوجد حسب قواعد الاسقاط المسقط الأفقي m لهذه النقطة والواقع على sb .

بالطريقة نفسها نحدد المسقطين الأمامي n' والأفقي n لنقطة N تقاطع حرف الهرم SC مع المستوي P (في هذه الحالة استخدمنا المستوي الاسقاطي الأفقي Q) .

لايجاد نقطة تقاطع الحرف SA مع المستوي P نمرر من هذا الحرف مستويا اسقاطيا أماميا L ، ونلاحظ أن المسقط الأمامي لخط التقاطع يتطابق مع المسقط الأمامي s'a' لحرف الهرم SA وكلاهما يتطابقان مع الأثر الأمامي للمستوي المساعد L_v . ولهذا نحدد أولا المسقط الأفقي k

لنقطة K تقاطع حرف الهرم SA مع المستوي P ٠ هذه النقطة نحصل عليها من تقاطع المسقط الأفقي sa للحرف مع المسقط الأفقي لخط تقاطع المستويين P و L ٠ ووفق قواعد الاسقاط نحدد المسقط الأمامي 'k لهذه النقطة ٠

وبالوصل بين النقاط 'm و 'n و 'k نحصل على المسقط الأمامي لسطح التقاطع وبالوصل بين النقاط m و n و k نحصل على مسقطه الأفقي ٠

ولابد أن نؤكد أن اختيار المستوي المساعد المار من حرف الهرم أو الموشور في كل حالة منفردة يجب أن يكون قائما على أساس الحصول على أبسط حل ممكن وبشكل مباشر تقريبا ٠

VII ـ٦ـ تقاطع هرم أو موشور مع مستقيم :

عند تقاطع مستقيم مع سطوح هرم أو موشور نحصل على نقطتين احداهما تسمى نقطة الدخول والأخرى تسمى نقطة الخروج ، تحددان بواسطة تمرير مستو من المستقيم المعني وايجاد خطوط تقاطع هذا المستوي مع سطوح الجسم (الهرم أو الموشور) ٠ وتقع خطوط التقاطع هذه جميعها في مستو واحد مع المستقيم المعني ، وتحدد نقاط تقاطع المستقيم مع هذه الخطوط نقاط تقاطعه مع الهرم أو الموشور المعني ٠

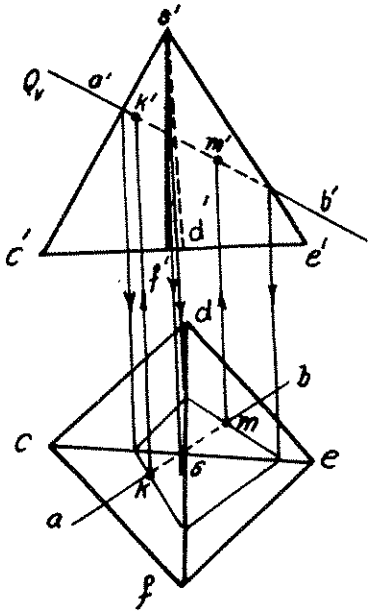
مثال ١ :

حدد نقطتي دخول المستقيم AB وخروجه عند قاطعه مع الهرم الرباعي SCDEF (الشكل ٢٠٩) ٠

الحل :

نمرر من المستقيم AB مستويا مساعدا اسقاطيا أماميا Q ٠ المسقط

الأمامي لسطح تقاطع هذا المستوي مع الهرم يتطابق مع الأثر الأمامي Q_v للمستوي . أما المسقط الأفقي لهذا السطح فاننا نحدده انشائيا ، كما هو موضح في الشكل (٢٠٩) . ان نقاط تقاطع المسقط الأفقي ab للمستقيم AB مع المسقط الأفقي لسطح تقاطع المستوي Q مع الهرم تحدد المساقط الأفقية لنقطتي دخول المستقيم AB وخروجه وهما النقطتان k و m ، ونوجد مسقطيهما الأماميين k' و m' وفق أسس الاسقاط العامة .



شكل رقم (٢٠٩)

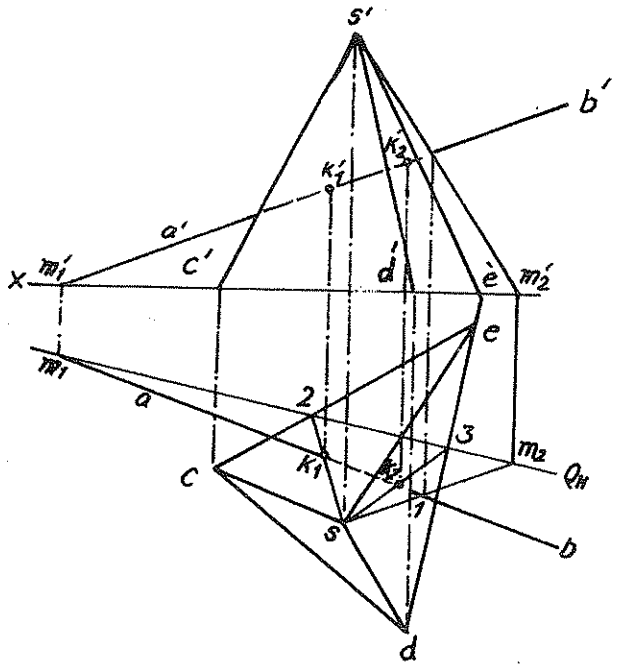
مثـــال ٢ :

حدد نقطتي دخول وخروج المستقيم AB المتقاطع مع الهرم الثلاثي S C D E (الشكل ٢١٠) .

الحـــل :

نمرر من المستقيم AB وقمة الهرم S مستويا Q الذي سيقطع سطحين من سطوح الهرم بمستقيمين مارين من قمته S . لتمثيل هذا المستوي نرسم مستقيما اضافيا كيفيا S 1 يمر من النقطة (1) الواقعة على المستقيم AB ، وبهذا يصبح المستوي Q محددا بمستقيمين متقاطعين ، هما A B و S 1 . بعد ذلك نرسم أثر هذا المستوي في مستوي قاعدة الهرم

(في مثالنا هذا قاعدة الهـــرم توازي مستوي الاسقاط الأفقي H ، ولذلك يبدو الأثر المرسوم وكأنـه أثر في المستوي H)، يتقاطـع هذا الأثر مع قاعدة الهـــرم بالنقطتين 2 و 3 اللتيـــن تنتميان الى خطي تقاطع المستوي Q مع سطوح الهرم • وفي مثالنا هذا يكفي أن نرسم المساقـــط الأفقية s2 و s3 لهذيـــن ألخطين • تمثل النقطة k_1 – وهي نقطة تقاطع s2 مع المسقط الأفقي ab للمستقيم – المسقط الأفقي لنقطة دخول المستقيم • وتمثـــل النقطة k_2 – وهي نقطة تقاطع s3 مع ab – المسقط الأفقي لنقطـــة خروج المستقيم • وبعد ذلك نحدد المساقط الأمامية k'_1 و k'_2 حسب أسس الاسقاط المتبعة •



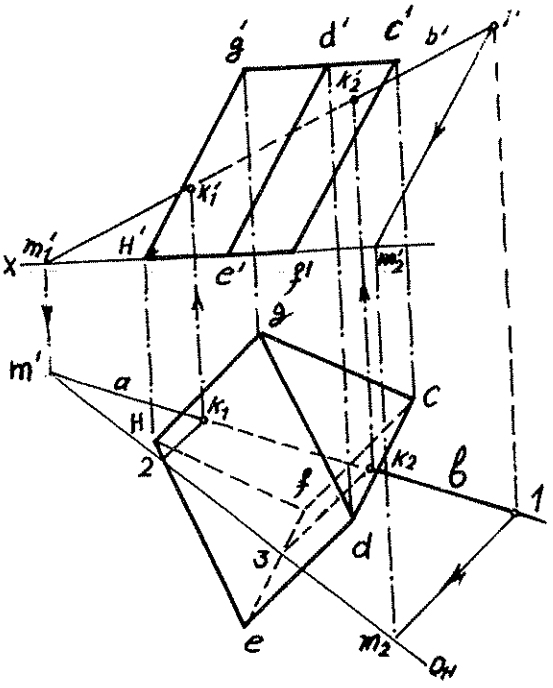
شكل رقم (٢١٠)

مثـــال ٣ :

حدد نقطتي دخول وخـــروج المستقيم AB المتقاطع مع الموشـــور الثلاثي C D E F G H (الشكل ٢١١) •

الحـــل :

اذا افترضنا أن الموشور المعني هرم قمته في مالانهاية أمكننـــا أن



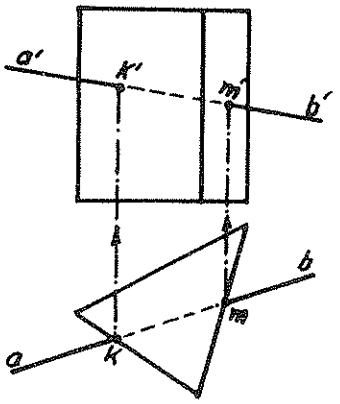
شكل رقم (٢١١)

نستخدم الطريقة المتبعة في المثال السابق ، وفي هذه الحالة يكون المستقيم المساعد الذي ينزل من قمة الهرم ويحدد المستوي Q مستقيما موازيا لأحرف الموشور . ولهذا الغرض نرسم من نقطة كيفية (1) على المستقيم AB (مسقطيها 1' و 1) مستقيما موازيا لأحرف الموشور (1 M) ، وبهذا يصبح المستوي Q محددا بمستقيمين متقاطعين ، هما AB و 1 M . من ثم نرسم أثره Q_h (أيضا لأن قاعدة الموشور موازية للمستوي H) ، فنحصل على النقطتين 2 و 3 اللتين تنتميان الى خطي تقاطع المستوي مع الموشور الموازيين أيضا لأحرف الموشور . ولهذا نرسم من المسقطين الأفقيين 2 و 3 لهاتين النقطتين مستقيمين موازيين لأحد أحرف الموشور (أو موازيين للمستقيم 1m)، فيقطعان ab في k_1 و k_2 وهما المسقطان الأفقيان لنقطتي دخول المستقيم AB وخروجه . والطرق السابقة ذاتها تحدد مسقطيها الأماميين k'_1 و k'_2 .

في بعض الحالات الخاصة يمكن أن نحصل مباشرة على نقطتي دخول وخروج المستقيم المتقاطع مع الهرم أو الموشور .

لدينا في الشكل (٢١٢) المستقيم AB المتقاطع مع موشور ثلاثي قائم قاعدته موازية لمستوي الاسقاط الأفقي ، أي أن حوافه عمودية على المستوي H .

ولهذا نحصل مباشرة على المساقط الأفقية m و k ومن ثم نحدد المساقط الأمامية 'k و 'm وفق قواعد الاسقاط ٠



شكل رقم (٢١٢)

VII ـ٧ـ تقاطع الأجسام متعددات السطوح :

يمكن أن نرسم خطوط تقاطع متعددات السطوح باحدى الطريقتين التاليتين أو بكلتيهما حسب متطلبات تسهيل الحلول وتبسيطها :

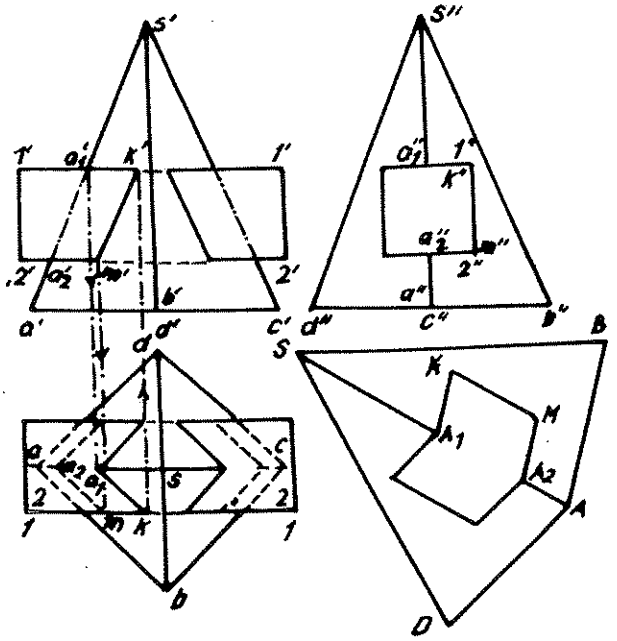
١ـ نحدد نقاط اختراق حروف (أضلاع) متعدد السطوح الأول لأوجه (لسطوح) متعدد السطوح الثاني ، ونحدد أيضا نقاط اختراق حروف متعدد السطوح الثاني لأوجه متعدد السطوح الأول ٠ ومن هذه النقاط المحددة نمرر ـ وفق تسلسل محدد بترتيب هذه النقاط بالنسبة للسطوح المتقاطعة ـ خطوط متكسرة تمثل خط تقاطع السطوح المعنية (ومن هذه النقاط المحددة يمكن أن نصل بين النقاط الواقعة في وجه واحد بخط مستقيم) ٠

ومن خلال ماذكرنا يمكن ملاحظة أن الطريقة المذكورة هي عبارة عن مجموعة مسائل تقاطع مستقيم مع مستو ٠

٢ـ نحدد خطوط تقاطع أوجه أحد متعددات السطوح مع أوجه متعدد السطوح الثاني ، وتمثل هذه الخطوط مفاصل الخط المتكسر الحاصل من تقاطع

الجسمين • وهنا أيضا يمكن ملاحظة أن الحل هو عبارة عن حل مجموعة مسائل تقاطع المستويات مع بعضها بعضا •

اذا كانت مساقط حرف أحد الأجسام المتعددة السطوح لاتتقاطع مع مسقط من مساقط أحد أوجه الجسم المتعدد السطوح الثاني ، فان هذا الحرف لايتقاطع مع الوجه المعني في الفراغ • ومن جهة أخرى لايعني تقاطع مساقط حرف جسم متعدد السطوح مع مساقط وجه (سطح) جسم متعدد السطوح ثاني أنهما متقاطعان في الفراغ •



شكل رقم (٢١٣)

مثـــال ١ :

ارسم خط تقاطع سطوح الهرم الرباعي المنتظم مع الموشور (الشكل ٢١٣) علما بأن قاعدة الهرم وقاعدتي الموشور توازي المستوي H •

الحـــل :

من خلال الشكل (٢١٣) يتضح لنا أن الموشور مغروز في جسم الهرم• ولذلك يمكن ايجاد خط التقاطع بالطريقة المتبعة في حل المثال الذي يوضحه الشكل (٢٠٣) ، (راجع VII ـ ٤) • وعلى هذا الأساس سنقتصر في حلنا هذا على طريقة ايجاد وتحديد النقاط A_1 و A_2 و K و M

والمستقيمات المحددة بها A_1K و A_2M و KM .

تقطع القاعدتان العليا والسفلى للموشور حرف الهرم SA في النقطتين A_1 و A_2 . ولما كانت هاتان القاعدتان موازيتان لقاعدة الهرم، فالمساقط a_1k و a_2m موازية لـ ab أيضا . وبتحديد المسقط الأفقي k من تقاطع a_1k مع مسقط الحرف $1-1$ يمكننا تحديد النقطة k' على $1'-1'$ ، ومنها نرسم $k'm'$ موازيا لـ $s'a'$ ، لأنهما مسقطان أماميان لجبهتي السطح $KM - SAB$ و SA ، فنحصل على m' من تقاطع $k'm'$ مع الحرف $2'-2'$ ، وبواسطتها نحدد m الواقعة على $2 - 2$ المنطبق على $1 - 1$.

في هذا الشكل تتضح لنا أيضا طريقة فتح وجهي الهرم SAB و SAD والثغرة الموجودة فيهما .

تتم عملية فتح هذه الأوجه باختيار نقطة كيفية تمثل قمة الهرم S ، ومنها نرسم المثلثين SAB و SAD بحيث تكون الحروف :

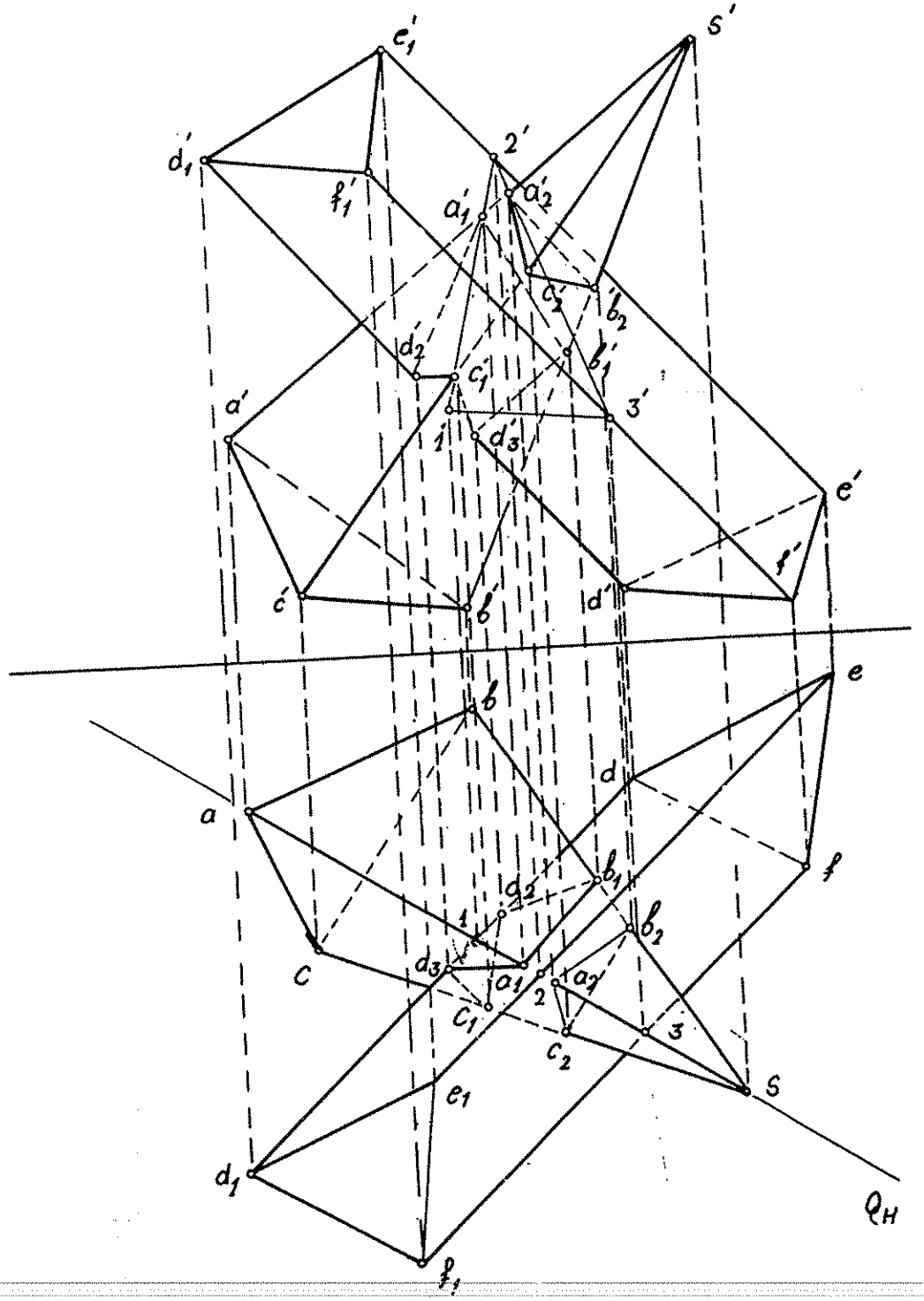
$s'a' = SD = SA = SB$ والحروف $BA = AD = ab = ad$.

وبعد ذلك نأخذ $SA_1 = s'a'_1$ و $SA_2 = s'a'_2$ ، ثم نرسم من النقطتين A_1 و A_2 في المثلث SAB مستقيمين موازيين للحرف AB ، ونحدد عليهما المسافات : $A_1K = A_2M = a_1k = a_2m$ ، وبعد ذلك نوصل K و M .

ونقوم من النقطتين A_1 و A_2 بالخطوات نفسها في المثلث SAD لاستكمال الشكل المطلوب .

مثـــال ٢ :

ارسم خطوط تقاطع سطوح الموشور الثلاثي $FE\ DF_1\ E_1D_1$ والهرم الثلاثي $SABC$ (الشكل ٢١٤) .


e_1'
s'
d_1'
$2'$
f_1'
a_1'
a_2'
c_2'
b_2'
d_2'
b_1'
c_1'
a'
$3'$
$1'$
d_3'
e'
f'
c'
b'
d'
e
b
d
a
f
b_1
a_2
b_2
C
d_3
a_1
a_2
c_1
c_2
e_1
S
d_1
Q_H
f_1

شكل رقم (٢١٤)

الحـــــل ١ :

للوصول الى الحل المطلوب نحدد نقاط تقاطع حروف أحد متعـــــــدد السطوح مع سطوح الجسم الثاني ومن ثم نحدد نقاط تقاطع حروف الثـاني مـع سطوح الأول . بكلمة أخرى نقول : نقوم بعمليات مكررة لحالة واحدة ، هـــي تقاطـــــع مستقيم مع جسم متعدد السطوح .

لذلك نأخذ أولا أحد حروف الهرم ، وليكن SA ، ونمرر منه مستويـــا مساعدا اسقاطيا أفقيا Q .

يتطابق المسقط الأفقي لسطح التقاطع بين الموشور والمستوي Q مـــع الأثر الأفقي للمستوي ، وفي هذه الحالة تمثل النقاط 1 و 2 و 3 المساقط الأفقية لنقاط تقاطع حروف الموشور DD_1 و EE_1 و FF_1 . ومن هـــــذه المساقط نحدد ـ وفق أسس الاسقاط ـ المساقط الأمامية '1 و '2 و'3 لهذه النقاط وحين نصل بينها نحصل على المسقط الأمامي '1'2'3 لسطح التقاطع الذي يقع في مستو واحد مع حرف الهرم SA ، ولهذا تمثل النقطتان a'_1 و a'_2 المسقطين الأماميين لنقطتي دخول وخروج الحرف SA المتقاطع مـــع الموشور وبناء على ذلك اذا ماطبقنا قواعد الاسقاط نحصل على مسقطيهمـــا الأفقيين a_1 و a_2 .

وبالطريقة المذكورة ذاتها يمكننا الحصول على نقاط دخول وخـــــروج الأحرف SB و SC ومساقطها الأمامية b'_1 و b'_2 و c'_1 و c'_2 ومساقطهـــا الأفقية b_1 و b_2 و c_1 و c_2 على التوالي .

وبعد ذلك نحدد بالطريقة السابقة ذاتها نقاط دخول وخروج حـــــروف الموشور DD_1 و EE_1 و FF_1 المتقاطعة مع سطوح الهرم SABC ،وكمثال على ذلك نأخذ الحرف DD_1 ونمرر منه مستويا مساعدا اسقاطيا أفقيـــــا

نستطيع بواسطته تحديد نقطتي دخول وخروج هذا الحرف D_2 و D_3 من سطوح الهرم المتقاطعة معه • وأما الحرفان EE_1 و FF_1 فنجد أنهما لايتقاطعان مع سطوح الهرم •

ولتجنب الخطأ أو الاشتباه به يفضل وضع جدول للاحرف والسطوح المتقاطعة ورموزها وتسلسل وصل بعضها ببعضها الاخر ، وكمثال على ذلك نأخذ المثال السابق :

الحرف المدروس	السطوح المتقاطعة مع الحرف المعني	نقطة تقاطع الحرف مع السطح	الوضع التسلسلي للنقطة المعنية في تسلسل توصيل النقاط •
الهرم SA	DEE_1D_1	A_1	١ ، ٦
	EFF_1E_1	A_2	I
الهرم SB	DEE_1D_1	B_1	٢
	EFF_1E_1	B_2	II
الهرم SC	DEE_1D_1	C_1	٤
	EFF_1E_1	C_2	III
DD_1	SCB	D_2	٣
	SAC	D_3	٥
الموشور EE_1	لايوجد	-	-
FF_1	لايوجد	-	-

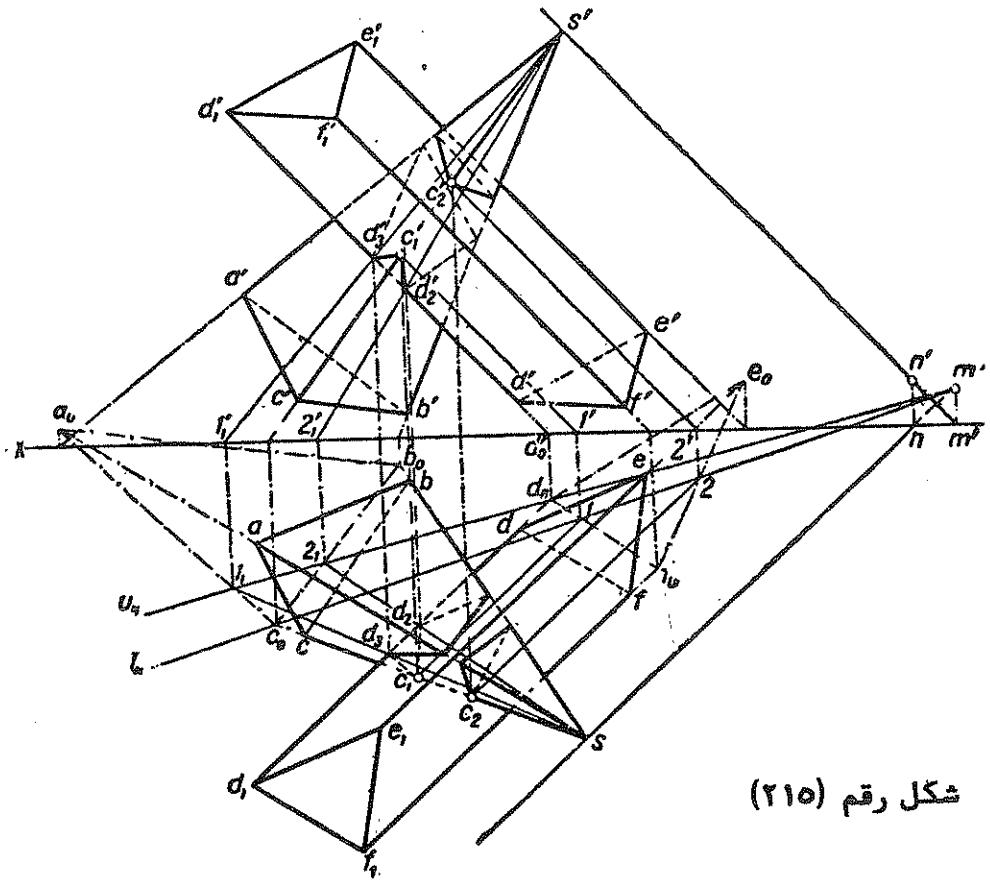
نحمل في المثال السابق على مقطعين (ينفصل أحدهما عن الآخر) من سطوح التقاطع التي تمثل سطوحا متعددة الزوايا ، ولتلافي الخلط بينهما

رمزنا لتسلسل توصيل نقاط أحد السطحين بالأرقام الهندية : ١ ، ٢، ٣، ٤، ٥ ٠ ولتسلسل الآخر بالأرقام اللاتينية : I وII و III ٠ وهذا يعني (كمثال نأخذ السطح الأول) أننا نصل بين نقاط المسقط الأفقي لهذا السطح وفق التسلسل التالي : النقطة a_I (١) توصل بالنقطة b_1 (٢) التي توصل بالنقطة d_2 (٣) التي توصل بالنقطة c_1 (٤) التي توصل بالنقطة d_3 (٥) التي توصل بالنقطة a_1 (٦) ، فيغلق محيط سطح التقاطع ٠

الحـــل ٢ :

نوضح في الشكل (٢١٥) طريقة أخرى لحل هذا المثال :

نمرر من قمة الهرم S مستقيما مساعدا موازيا لحروف الموشور ،وليكن



شكل رقم (٢١٥)

المستقيم SM ، فنلاحظ أن جميع المستويات المساعدة المارة من هـــــذا المستقيم والمتقاطعة مع الموشور $DEFD_1E_1F_1$ والهرم SABC تتقاطع مع سطوح الموشور بمستقيمات موازية لحروفه ومع سطوح الهرم بمستقيمات مارة من قمته ٠

تحدد تقاطع هذه المستقيمات (خطوط تقاطع المستوي المساعد مـــع الموشور وخطوط تقاطعه مع الهرم) النقاط المشتركة بين الموشور والهرم ، وبتعبير اخر نقول : يحدد نقاط تقاطعها مع بعضها بعضا ٠

مثـــال ٣ :

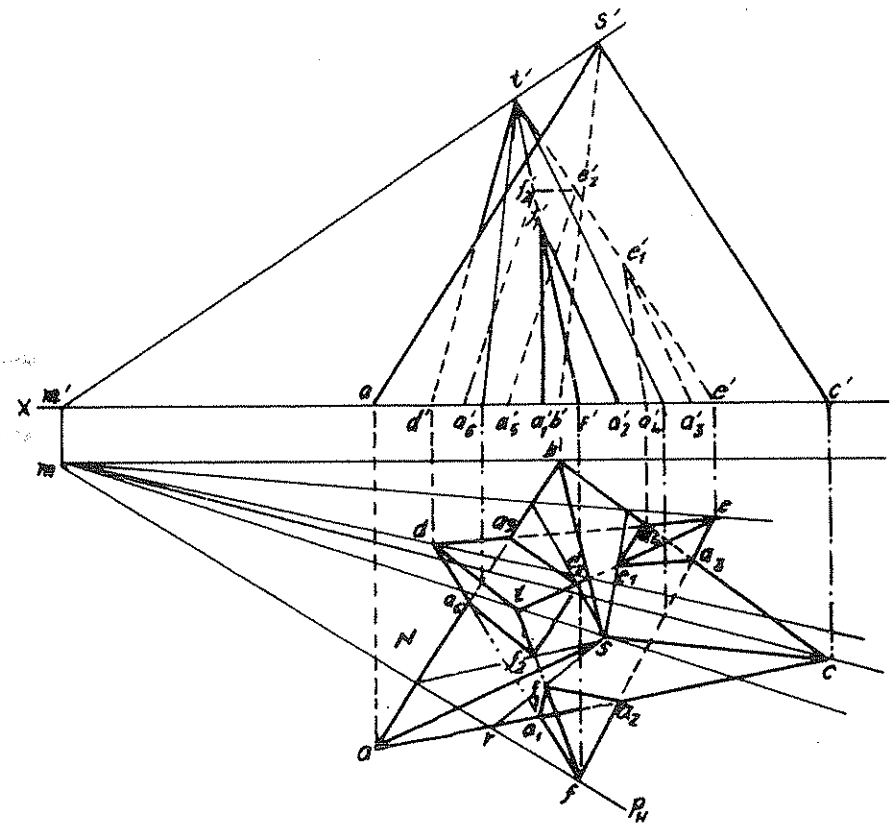
ارسم خطوط (سطوح) تقاطع هرمين ABCS و D E F T ٠

الحـــل :

يوضح الشكل (٢١٦) الحل المطلوب من خلال استخدام مستويـــات مساعدة مارة من قمتي الهرمين S و T ٠ ولهذا الغرض نمرر من القمتين S و T مستقيما ، ونحدد أثره الأفقي M ٠ ان أي مستو يمر من هـــذا المستقيم ST لابد أن يمر من قمتي الهرمين ويقطع سطوحهما بمستقيمـات تمر من قممها ، وتمر الاثار الأفقية لهذه المستويات جميعهامن النقطة m ٠

نفترض أن المستقيم mf يمثل الأثر الأفقي لمستو مار من القمتين T و S ، ولذلك تمر بالضرورة من الحرف TF ، ونرمز لهذا الأثر P_h ٠

يقطع هذا المستوي المساعد P قاعدة الهرم SABC بالمستقيم MR واذا وصلنا ، في المسقط الأفقي ، القمة S بكل من النقطتين n و r فاننا نحصل على حدود مقطع الهرم المقطوع بواسطة المستوي P (الحـــاوي علـــى الحرف TF) ، وبالتالي نحصل على نقطتي f_1 و f_2 وهما المسقطـــان



شكل رقم (٢١٦)

الأفقيان دخول وخروج الحرف TF اذا ماتقاطع مع الهرم SABC • يتم ايجاد المساقط الأمامية لهاتين النقطتين وفق قواعد الاسقاط • وأما بقية الأوضاع فالجدول التالي يوضحها :

الحرف المدروس	السطوح المتقاطعة مع الحرف المعني	الحروف المتقاطعة مع الحرف المعني	نقاط التقاطع
TF	ACS	-	F_1
	ABS	-	F_2
TE	CBS	-	E_1
	ABS	-	E_2

الحرف المدروس	السطوح المتقاطعة مع الحرف المعني	الحروف المتقاطعة مع الحرف المعني	نقاط التقاطع
TD	لايوجد	لايوجد	–
FD	–	AC	A_1
	–	AB	A_4
FE	–	AC	A_2
	–	BC	A_3
DE	–	AB	A_5
	–	BC	A_6
AS	لايوجد	–	–
BS	لايوجد	–	–
CS	لايوجد	–	–

الفصل الثامن :

تغيير الوضع الإسقاطي للعنصر الهندسي الفراغي

* **مدخـــل** : انتقال وضع العنصر الهندسي من الحـالة العامة الى الحـــالات الخاصة .

* **طريقـــة التـــدوير** :

دوران نقطة حول محور يعامد أحد مستويات الاسقاط .

تدوير مقطع مستقيم حول محور يعامد أحد مستويات الاسقاط .

تحديد طول مقطع مستقيم وزاوية ميله بالنسبة لمستويات الاسقاط .

التدوير الثنائي لمقطع مستقيم كيفي .

تدوير مستو حول محور يعامد أحد مستويات الاسقاط .

تحديد مسافة بين مستو ونقطة واقعة خارجه .

التدوير الانتقالي في الاسقاط المحدود والشامل .

تدوير المستوي حول أحد مستقيماته الخاصة .

التطابق كحالة خاصة بالتدوير .

* **مستويات الاسقاط المساعدة** :

استبدال مستو اسقاطي أساسي واحد .

استبدال المجموعة الاسقاطية الأساسية كليا .