am ، يمثل المسقط الأفقي لجبهة المستوي ، ونمرر من النقطة a' مستقيما a'm' عموديا على b'c' ، يمثل المسقط الأمامي لجبهة المستوي ونمرر آخر a'n' أفقيا يمثل المسقط الأمامي لأفق المستوي ، وبهذا نحقق قاعدة التعامد ، ونحصل على المستوي P الذي يحدد بالمستقيمين المتقاطعين AM و AN ويعامد المستقيم BC ويمر من النقطة A ، كما هو موضح في الشكل (١٧٩) .

IV ـ٧ـ١ـ تعامد مستقيمين :

يمكن استخدام القواعد المذكورة سابقا في تحديد (رسم) التعبير الاسقاطي لمستقيمين متعامدين . لقد ذكرنا سابقا ضمن قواعد التعامد وبديهياته أن المستقيم العمودي على مستو يكون عموديا على جميع المستقيمات الواقعة في هذا المستوي .

لنفترض أن المطلوب هو انزال مستقيم من النقطة A عمودي على المستقيم BC . ان حل هذه المسألة وتحديد مساقط المستقيم المطلوب يتم وفق الخطوات العامة التالية :

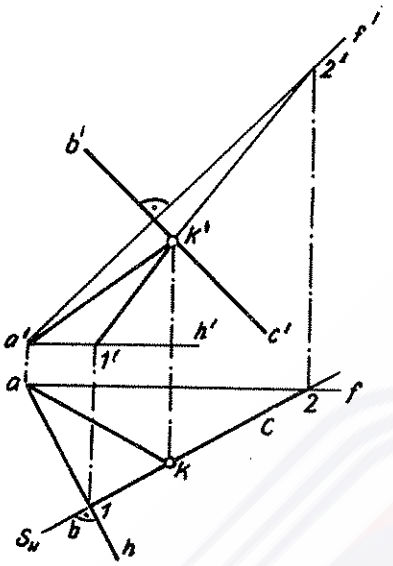
١ـ من النقطة A نمرر مستويا Q عموديا على المستقيم BC .

٢ـ نحدد نقطة K تقاطع المستقيم BC مع المستوي Q .

٣ـ نوصل بين النقطتين A و K بمقطع مستقيم . المستقيمان AK و BC متعامدان .

ان الشكل (١٨٠) يوضح لنا مثالا لتحديد مثل هذه المستقيمات . ففي هذا الشكل مررنا من خلال النقطة A المستوي Q العمودي على المستقيم BC . وقد تم ذلك من خلال استخدام جبهة المستوي وأفقه . وحسب قواعد

التعامد التي ذكرناها في هذه الفقرة يكون المسقط الأمامي b'c' للمستقيم عموديا على المسقط الأمامي a'f' لجبهة المستوي ولهذا يمكننا بسهولة أن نرسم من a' المستقيم a'f' عموديا على b'c' . وفي الوقت نفسه يكون المسقط الأفقي bc للمستقيم عموديا على المسقط الأفقي ah لأفق المستوي فمن النقطة a نرسم المستقيم ah عموديا على bc .



شكل رقم (١٨٠)

ولايجاد نقطة تعامد (تقاطع) المستقيم BC مع المستوي Q نمرر مستويا اسقاطيا أفقيا S من خلال المستقيم BC (الشكل ١٨٠ يعبر عن المستوي S بأثره الأفقي S_h) هذا المستوي يتقاطع مع المستوي Q المار من النقطة A بخط التقاطع الذي تعبر عنه مساقطه 2 - 1 و 2'-1' . ان تقاطع هذا المستقيم مع المستقيم BC يعطينا النقطة K ، وان وصل A بـ K يجعلنا نحصل على المستقيم AK الذي يعامد BC (من بديهيات التعامد) ، وهو المطلوب .

VI ـ٨ـ تحديد المستويات المتعامدة :

ان تحديد المستويات المتعامدة والتعبير عنها اسقاطيا يتم باحدى الطريقتين التاليتين :

١ـ نمرر المستوي الأول (وليكن Q) من مستقيم عمودي على المستوي

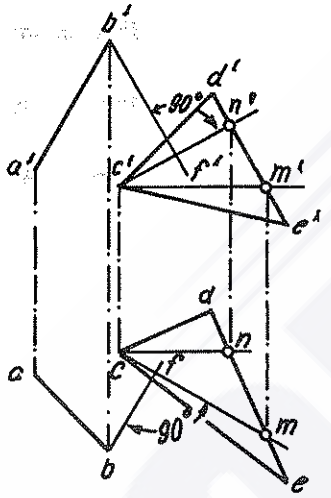
الثاني (وليكن P) .

٢- نمرر المستوي Q بحيث يعامد مستقيما واقعا في المستوي P أو يعامد مستقيما موازيا لهذا المستوي . وللحصول على حل وحيد لهذه الطريقة لابد أن تتوفر شروط اضافية .

مثال ١ :

مرر من المستقيم AB مستويا عموديا على المستوي المحدد بالمثلث CDE .

الحل :



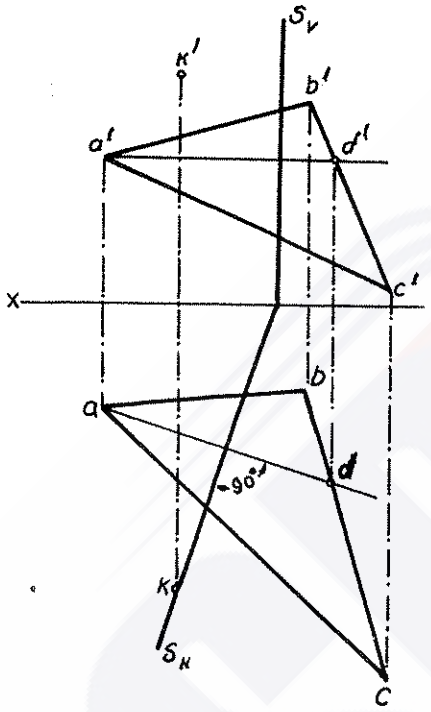
شكل رقم (١٨١)

اذا استخدمنا الطريقة الأولى (الشكل ١٨١) فسيكفينا أن نقيم عمودا على المثلث CDE من أية نقطة على المستقيم AB . وحسب شروط التعامد التي ذكرناها في الفقرة السابقة نجد أن المسقط الأمامي لهذا المستقيم يعامد المسقط الأمامي لجبهة المستوي وأن مسقطه الأفقي يعامد المسقط الأفقي لأفق المستوي. ولهذا نرسم من النقطة C مستقيما أفقيا يمثل المسقط الأفقي cn لجبهة المستوي ، ومن ثم نحدد 'n ونوصل بين 'n و 'c فنحصل على 'c'n المسقط الأمامي لجبهة المستوي ومن نقطة 'b نرسم المستقيم 'b'f عموديا على 'c'n . وبعد ذلك نرسم من النقطة 'c مستقيما أفقيا يمثل المسقط الأمامي 'c'm لأفق المستوي ، ومن ثم نحدد m ونوصل c و m فنحصل على المسقط الأفقي cm لأفق المستوي ومن نقطة b نرسم المستقيم bf عموديا على cm . وبذلك نحصل على المستقيم BF العمودي على المستوي

المحدد بالمثلث CDE • ولهذا نجد أن المستقيمين AB و BF يحـــــددان المستوي المطلوب •

مثـــال ٢ :

مرر من النقطة K (الشكل ١٨٢) مستويا يعامد مستوي الاسقاط الأفقـي H والمستوي المحدد بالمثلث ABC فـــي آن معا •



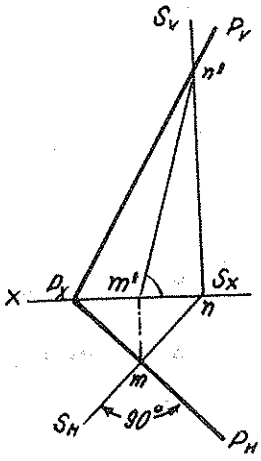
شكل رقم (١٨٢)

الحـــل :

من الواضح أن المستوي المطلـــوب هو مستوي اسقاطي أفقي • ولذلك نرســـم أفق المستوي AD للمستوي المحـــــدد بالمثلث ABC ومن نقطة K نمـــــرر مستويا اسقاطيا أفقيا عمودي على AD ، وذلك برسم أثره الأفقي S_h المار من المسقط الأفقي للنقطة K عموديا عـلى المسقط الأفقي cd لأفق المستوي ، ومن ثم نرسم أثره الأمامي S_v عموديـــا على خط الأرض • هذا المستوي الذي يعامد مستقيما ينتمي الى المستـــوي المحدد بالمثلث ABC يكون عموديا على المستوي ABC نفسه •

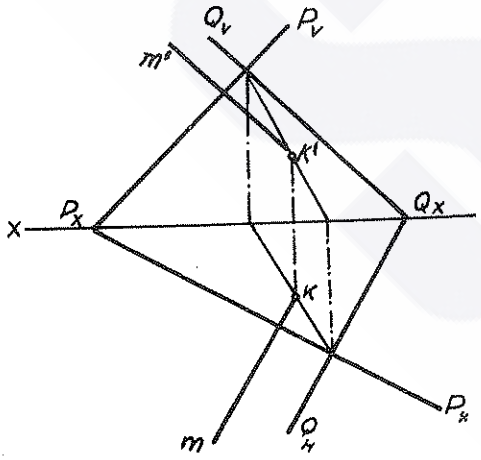
ولندرس الآن الأوضاع المتبادلة لآثار المستويات المتعامدة وندرس كذلـك الأوضاع المتبادلة للمستويات المتعامدة آثارها • في الشكل (١٨٣) المستوي الاســـقاطي الأفـــقي S يعامـــد المســـتوي P في الحـــالة العـــــامة • ولمـــا كـــــان $S \perp H$ و $S \perp P$ فان $S \perp P_h$ ، وهـــــذا

يعني $P_h \perp S_h$ وبالعكس نقول : اذا كان $P_h \perp S_h$ و $S \perp H$ فان $P_h \perp S$ أو $S \perp P_h$ وهـــذا يعني أن $S \perp P$.



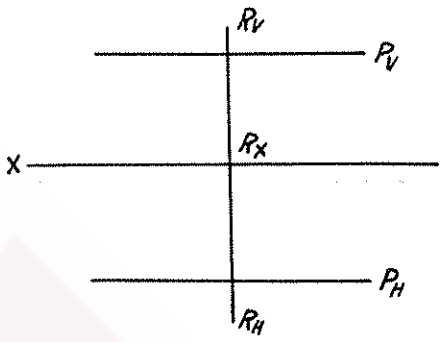
شكل رقم (١٨٣)

ان هذا الاستنتاج يوصلنا الى قاعدة عامة تقول : ((اذا كان أحد المستويين المتعامدين (أو كلاهما) مستويا اسقاطيا فان آثارهما في مستوي الاسقـــاط المعني متعامدة ، أي : اذا كان أحد المستويين اسقاطيا أفقيا فان آثارهما الأفقية متعامدة ،واذا كان أحدهما مستويا اسقاطيا أماميا فان آثارهما الأمامية متعامدة ، ... وهكذا)) . أما القاعدة العكسية فهي تقول : ((اذا تعامد أثرا مستويين وكان أحد المستويين اسقاطيا على مستوي الاسقاط المعني فان المستويين متعامدان)) .



شكل رقم (١٨٤)

وأما اذا كان المستويان في الحالة العامة فان تعامد الأثار المتناظرة لايعني بالضرورة أن يعامد المستويين نفسيهما . لدينا في الشكل (١٨٤) المستويـــان P و Q ، آثارهما المتماثلة متعامدة ، أي : P_h و Q_h P_v و Q_v ، لكـــن المستويين غير متعامدين ، ولاثبات ذلـــك نحدد خط تقاطعهما ، ونقيم من نقطة مـا عليه (مثلا النقطة K) مستقيما MK عموديا على أحد المستويين وليكـــن المستوي P . فاذا كان المستويان P و Q متعامدين فان المستقيـم MK



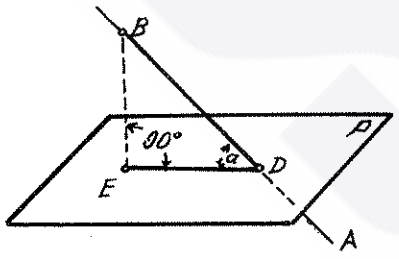
شكل رقم (١٨٥)

يجب أن يقع في المستوي Q ، وهذا يعني أن آثاره يجب أن تقع على آثار المستوي Q التي تماثلها ، الا أن ذلك ـ كما هو واضح من الشكل ـ غير ممكن ، لأن Q_h // mk و Q_v // m'k' . لدينا في الشكل (١٨٥) حالة تطابق تعامد الآثار المتماثلة مع تعامد المستويات ذاتها . الا أن هذه المستويات ليست في حالتها العامة بل في أوضاع خاصة ، فالمستوي P اسقاطي جانبي يوازي خط الأرض والمستوي R جانبي (مستوي تطابق جانبي) ـ ولذلك تعامد الآثار بعضها بعضا $R_v \perp P_v$ و $R_h \perp P_h$ في الوقت نفسه .

VI ـ٩ـ اسقاط زاوية بين مستقيم ومستو :

اذا كان المستقيم المتقاطع مع مستو لايعامده فانه يصنع معه زاوية تمثل الزاوية المحصورة بين المستقيم نفسه ومسقطه على هذا المستوي .

(اسقاط الزاوية المحصورة بين المستقيم ومستويات الاسقاط راجع الفصل **الرابع** ، الفقرة IV ـ٢) .



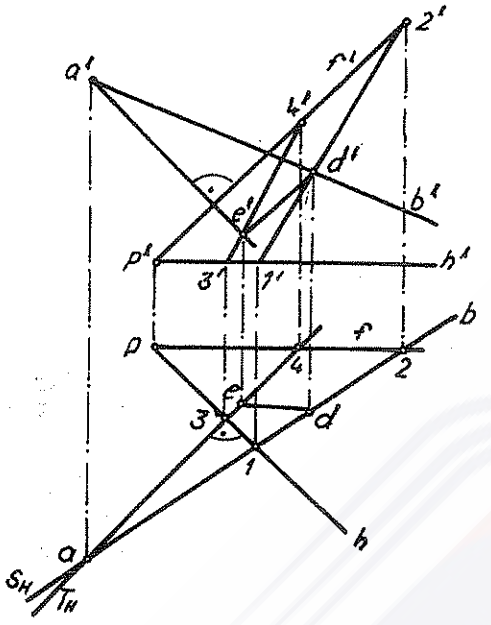
شكل رقم (١٨٦)

اذا قطع المستقيم AB المستوي P الشكل (١٨٦) في النقطة D ، فان الزاوية التي ينصعها مع هذا المستوي تمثلها الزاوية α المحصورة بين

المستقيم نفسه ومسقطه ED على هذا المستوي .

ولتحديد مساقط الزاوية بين المستقيم A B ومستو ما P نتبع الخطوات التالية التي يوضحها الشكل (١٨٧):

لدينا المستقيم AB المعبر عنه بمسقطيه والمستوي المتقاطع معه والمعبر عنه بأفقه PH وجبهته PF :



شكل رقم (١٨٧)

١ـ نحدد نقطة تقاطع المستقيم AB والمستوي P ، وهي النقطة D ، حين نمرر مستويا اسقاطيا أفقيا مساعدا S من المستقيم AB .

٢ـ نقيم من النقطة A عمودا على المستوي P .

٣ـ نوجد نقطة تقاطع هذا العمود مع المستوي P ، وهي النقطة E ،حين نمرر مستويا اسقاطيا أفقيا مساعدا من هذا العمود .

٤ـ نصل بين النقاط d و e ، d' و e' ، فنحصل على مساقط المستقيم AB على المستوي P .

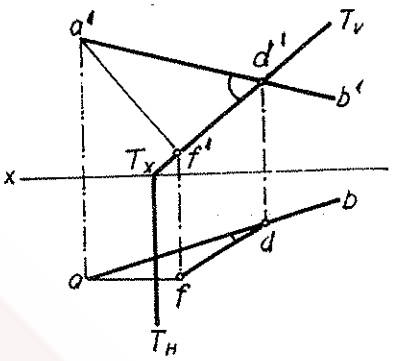
٥ـ تمثل الزاوية a'd'e' المسقط الأمامي للزاوية بين المستقيم AB والمستوي P .

٦ـ تمثل الزاوية ade المسقط الأفقي لهذه الزاوية .

اذا كان المستوي في احدى الحالات الخاصة فان تحديد مساقط الزاوية المعنية يبسط كثيرا ، اذ أن تحديد نقطة تقاطع المستقيم معه

لايحتاج الى مستويات مساعـــــــــدة .

مثلا : في الشكل (١٨٨) يصنع المستقيم AB زاوية مع المستوي الاســقاطي الأمـامي T ، مساقطها تحدد بالطريقة السـابقة نفسـها ، ولما كان المستوي T ذاته اســقاطيا فان الحاجة الى مثل هذا المستوي في تحــديـد نقطة تقاطع المستقيم AB مع المســتوي ، وهي النقطة D ، لاتغدو ضرورية وعلى هذا الأساس فان مسقطي الزاوية بيـــن المستقيم AB والمستوي T هما : المسقط الأفقي adf والمسقط الأمامي a'd'f' .

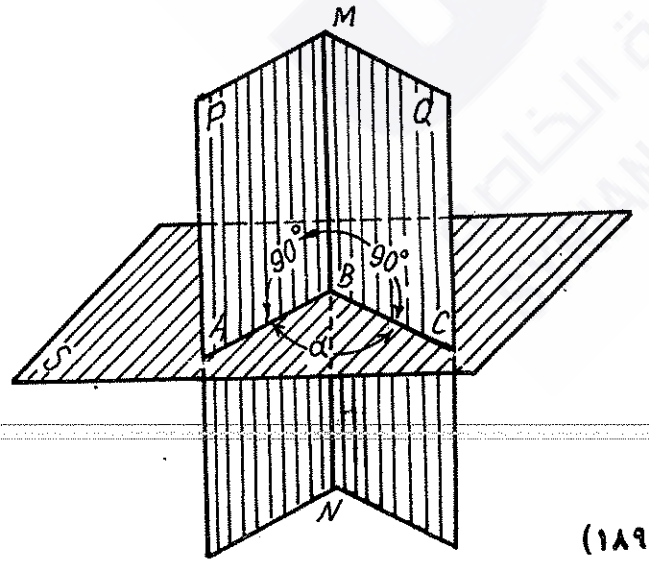


شكل رقم (١٨٨)

VI ـ١٠ـ تحديد مساقط زاوية بين مستويين :

عند تقاطع مستويين يصنعان بينهما أربع زوايا ثنائية السطوح نكتـــفي بدراســـــة احدى الزوايا (لتناظر أوضاعها) الحاصلة من تقاطع نصـــــفي المستويين P و Q (الشكل ١٨٩) . ولرسم زاويتها الخطية نقطع ضلعهـا MN بمستو S عموديا عليه .

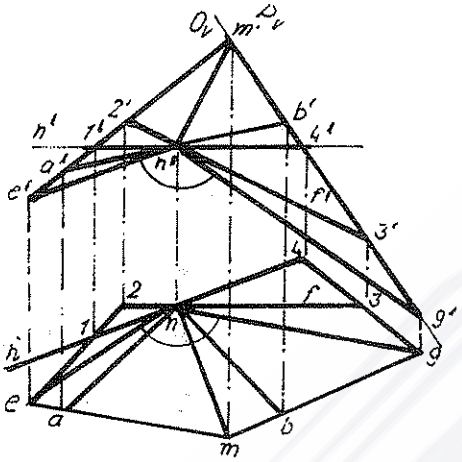
لرسم مساقط الزاويـــة الخطية لتقاطع مستويين نتبع الخطوات التي يوضحها الشكل (١٩٠) حيث أن المســـتوي P محدد بالمثلث AMN والمستوي Q محدد بالمثلث BMN :



شكل رقم (١٨٩)

١ــ نمرر من النقطة N مستويا S عموديا على MN ٠ محددا بجبهته NF وأفقه NH ٠

٢ــ نحدد خط تقاطع المستويين P و S وهو المستقيم EN ٠ ولما كان المستوي S يمر أساسا من النقطة N التي تنتمي الى المستوي P فاننا نحتاج الى تحديد النقطة E ، ولهذا الغرض نستخدم مستويا مساعدا T ٠



شكل رقم (١٩٠)

٣ــ نحدد خط تقاطع المستويين Q و S ، وهو المستقيم NG ، وهنا نحتاج أيضا الى تحديد النقطة G لأن النقطة N أساسا تنتمي الى المستويين ٠

تمثل النقطة N رأس الزاوية الخطية المعنية ، ولهذا تمثل الزاوية eng المسقط الأفقي للزاوية المعنية و e'n'g' ــ مسقطها الأمامي ٠

الفصل السابع :

الأجسام الهندسية

متعددة السطوح المستوية

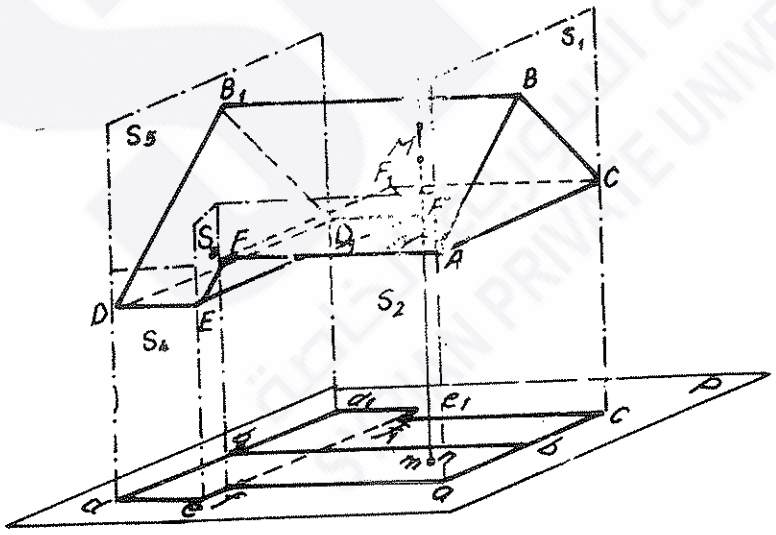
- اسقاط متعددات السطوح .
- اسقاط متعددات السطوح دون استخدام محاور الاسقاط .
- الهرم والموشور واسقاطهما .
- العناصر الهندسية الواقعة على سطوح الحسم متعدد السطوح المستوية .
- تقاطع الموشور أو الهرم مع مستو .
- تقاطع هرم أو موشور مع مستقيم .
- تقاطع الأجسام متعددات السطوح .

SYRIAN PRIVATE UNIVERSITY الجامعة السورية الخاصة

يمكن أن ننظر الى الأجسام الهندسية متعددة السطوح المستوية على أساس أنها مجموعة من المستويات ذات الأشكال الهندسية المحددة والمتقاطعة فيمابينها تتخذ أحيانا أوضاعا خاصة بالنسبة لمستويات الاسقاط .

VII-1- اسقاط متعددات السطوح :

ان ايجاد مساقط جسم هندسي ما على مستوي اسقاط أو مجموعة مستويات اسقاطية محددة يلخصه وبحدده عمليا ايجاد مساقط بعض نقاطه وخطوطه .



شكل رقم (١٩١)

لدينا في الشكل (١٩١) الجسم الهندسي $ACBB_1\ DEFF_1\ E_1\ D_1$ والشكل

$acf_1\ e_1\ d_1\ d\ e\ f$ الذي يمثل مسقطه على المستوي P .

ان كل نقطة واقعة داخل حروف هذا الشكل (أي داخل الخطوط التي تحدد هذا الشكل) يمكن أن تمثل مساقط مجموعة من نقاط الجسم المعني ، وتمثل على الأقل نقطتين من سطحه . مثلا : تمثل النقطة ذات الرمزين m و n في المسقط في آن معا مسقطا لكل من النقطتين M و N وهي أيضا مسقط جميع النقاط الواقعة في الجسم على مستقيم اسقاطي واحد يمر من النقطتين M و N (أي عمودي على مستوي الاسقاط P) .

أما النقاط الواقعة على حروف مسقط الجسم (الخطوط التي تحدده) فهي يمكن أن تمثل مسقط نقطة واحدة من الجسم ، كالنقاط A و C و D و E ، ... الخ ، ومساقطها a و c و d و e ، ... الخ ، أو أنها تمثل مساقط مجموعة من النقاط أو عدد لامتناه من النقاط . مثلا : لاتمثل النقطة b في المسقط مسقط النقطة B فحسب ، وانما تمثل مساقط العدد اللامتناهي من نقاط الواجهة ABC الواقعة على المستقيم الاسقاطي Bb .

ان المستقيمات المارة من جميع نقاط حروف المسقط سطحا اسقاطيا يحوي الجسم المعني في داخله ويمسه ، وتمثل السطوح S_1 ، S_2 ، S_3 ، ... الخ السطوح الاسقاطية التي تحوي الجسم الذي يوضحه الشكل (١٩١) ، وتسمى مستقيمات التماس بين الجسم وهذه السطوح بـ " حروف " الجسم ، سواء أكان ذلك فراغيا أم اسقاطيا . وعلى هذا الأساس يمثل الخط المتكسر $A\ C\ F_1\ E_1\ D_1\ D\ E\ F\ A$ في الشكل (١٩١) حروف الجسم بالنسبة لمستوي الاسقاط P .

ان المستقيم المرسوم في المسقط bb_1 يمثل مسقط الحرف BB_1 المرئي بالنسبة لمستوي الاسقاط P . ويجب أن نشير هنا الى أن تحديدجميع

الحروف المرئية للجسم على مسقطه يعد مسألة الزامية ٠

ان مسقط الحرف FF_1 يكون داخل اطار المسقط ، ولذلك نجده غير مرئي بالنسبة لمستوي الاسقاط P ، وعلى هذا الأساس يمثل بخط منقط (متقطع) ٠

VII ـ٢ـ اسقاط متعددات السطوح دون استخدام محاور الاسقاط :

تكلمنا في الفصل الثالث (III ـ٣) عن الاسقاط الشامل (دون استخدام محاور الاسقاط) وتوصلنا الى أن المسألة الأساسية للعنصر الهندسي الفراغي هي تحديد الحيز (الشكل والحجم) الفراغي الذي يحتله من الفراغ ، وهذا الحيز الفراغي غير مرتبط بموقع محدد ، مثلا : ان شكل وحجم القلم الذي نكتب به لايتغير سواء أنظرنا اليه في قاعة الدراسة أو في الشارع أم في البيت أم في أي مكان آخر ٠ وهذا يعني أن هناك امكانية للاستغناء عن المفهوم الموقعي للاسقاط مع المحافظة على أسس الاسقاط العامة التي تتلخص بمايلي :

١ـ المساقط الأفقية والأمامية للعنصر الهندسي تقع على مستقيم شاقولي واحد ٠

٢ـ المساقط الأمامية والجانبية للعنصر الهندسي تقع على مستقيم أفقي واحد ٠

٣ـ لايتأثر وضع العناصر الهندسية بالنسبة لبعضها بعضا عند الاستغناء عن محاور الاسقاط ، ويتحدد هذا الوضع بفارق احداثياتها ، وهي قيم ثابتة دائما بغض النظر عن الموقع الاسقاطي المشترك لهذه العناصر ٠ ويمكن التعبير عن ذلك بالعلاقات التالية :

$$|X_1 - X_2| = \text{const} \qquad (\text{ثابت})$$

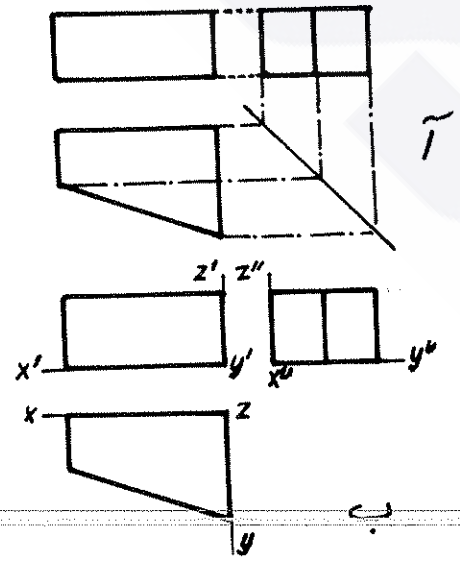
$$|Y_1 - Y_2| = \text{const} \qquad (\text{ثابت})$$

$$|Z_1 - Z_2| = \text{const} \qquad (\text{ثابت})$$

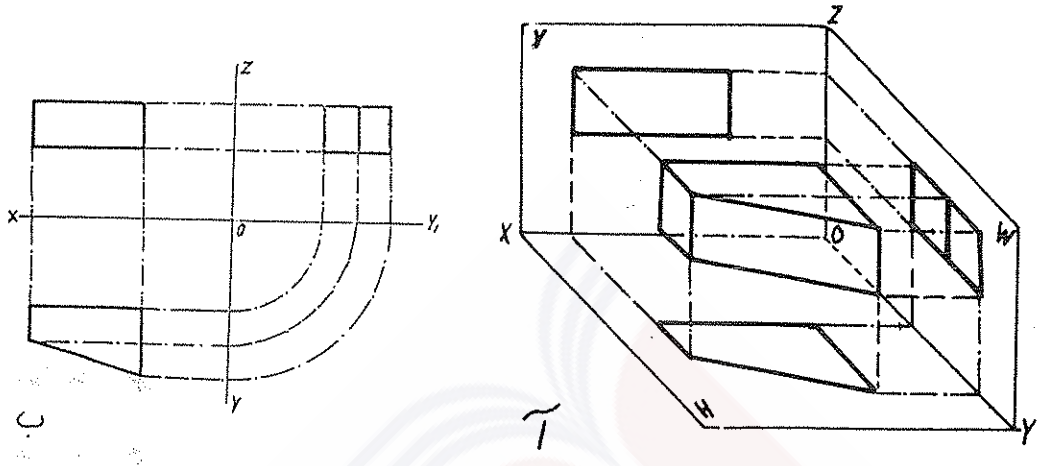
هذه الخواص هي التي نستند اليها عند تحديد مساقط متعددات السطوح دون استخدام محاور الاسقاط ، فالقيم المذكورة في الفقرة (٣) تمثل بالنسبة لمتعددات السطوح الأبعاد بين الحواف والسطوح الجانبية (وهو مايسمى بطول متعددات السطوح L) وبين الحواف والسطوح الأمامية (وهو مايسمى بعرض متعددات السطوح B) وبين الحواف والسطوح الأفقية (وهو مايسمى بارتفاع متعددات السطوح H) .

بالاضافة الى تبسيط عملية رسم المساقط نرى أن الاسقاط دون استخدام محاور الاسقاط يفسح المجال للتصرف بالفراغات (المسافات) بين مساقط العنصر الهندسي الواحد ، وذلك بمايتناسب ومجال الرسم المستخدم .

لدينا في الشكل (١٩٢) تعبيران اسقاطيان للموشور ، الذي يوضح وضعه الفراغي الشكل (١٩٣ آ) دون استخدام محاور الاسقاط . في التعبير الأول استخدمنا لرسم المسقط الجانبي مستقيما ينصف الزاوية القائمة (الشكل ١٩٢ آ) وفي التعبير الثاني (الشكل ١٩٢ ب) استخدمنا الأبعاد بين سطوحه المتوازية . ومن المقارنة بين الشكلين (١٩٢ و١٩٣ ب) يتضح لنا أن الحيز الذي يشغله التعبيران الاسقاطيان دون استخدام المحاور هو أقل

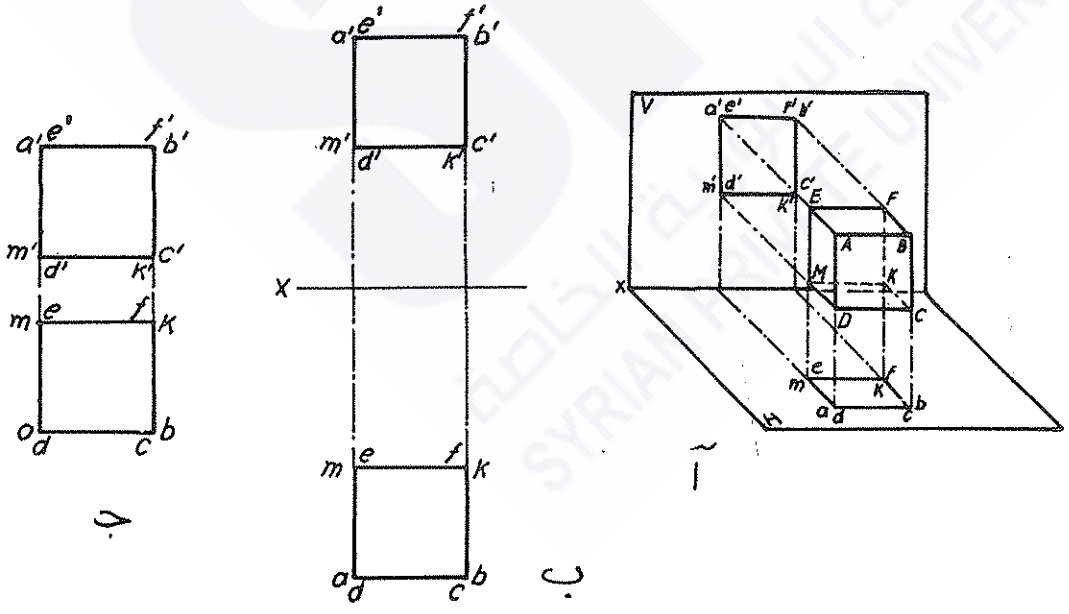


شكل رقم (١٩٢)



شكل رقم (١٩٣)

من الحيز الذي يشغله التعبير الاسقاطي الذي استخدمت فيه محاور الاسقاط ٠ والشيء نفسه يتضح من خلال مقارنة التعبيرين الاسقاطيين في (ب) و (جـ) للمكعب الذي يعبر عنه فراغيا الشكل (١٩٤ آ) ٠



شكل رقم (١٩٤)

VII ـ٣ـ الهـــرم والموشـــــور :

اذا كان لدينا سطح مستو (مثلث أو مربع أو متعدد الأضلاع) ونقطـــة خارجة عنه فان من الممكن حسب قواعد انشاء المستوي أن نمرر مستويات مـن هذه النقطة الى كل ضلع من أضلاع السطح المذكور ٠ هذه المستويات التـــي تحدد بالمستقيمات الواصلة بين النقطة ورؤوس السطح المستوي ، والتـــي نسميها بـ " **حروف الجسم** " ، تشكل جسما منتظما متعدد السطوح نسميـــه بـ " الهرم " ، فالسطح المستوي يكوّن " قاعدته " والنقطة الخارجة عنـــه تكوّن " قمته " ٠ واذا كانت هذه النقطة في اللانهاية ، فاننا سنحصل عـــلى جسم منتظم متعدد السطوح حروفه متوازية تلتقي في النقطة المعنيـــة فـي اللانهاية ، ونسمي هذا الجسم بـ " **الموشور** " ، يكوّن السطح المســـتوي " قاعدته " ، ويسمى الموشور بـ " الموشور القائم " عندما تعامد حروفـــه قاعدته ، وان لم يتعامدا سمي بـ " موشور مائل " ٠ ويسمى الموشور القـائم منتظما اذا كانت قاعدته منتظمة ، أي : متساوية الأضلاع ٠ وأما الهـــرم فسيُعّد منتظما اذا كانت قاعدته منتظمة وقمته واقعة على العمود المقام من مركز قاعدته ٠

VII ـ٣ـ١ـ مساقط الموشـــور والهرم :

توصلنا في الفقرة (VII ـ١ـ١) الى أن رسم مساقط الموشور أو الهرم يتم برسم مساقط نقاط ومستقيمـــات معينة تمثل نقاط حوافها وحروفها ووفق القواعد والأســس العامة للاسقاط ٠

شكل رقم (١٩٥)