8- نقوم بإعادة نفس الخطوات السابقة، حتى تيم الحصول على قيم موجبة للتكاليف الجديدة $(\hat{C}_{ij})$ أي ان $(\hat{C}_{ij} \geq 0)$ والتي من خلالها يتحقق الحصول على الحل الأمثل للمشكلة.

مثال (3):

استخدم النتائج النهائية المستحصل عليها بموجب طريقة العنصر الأقل كلفة الواردة في المثال (2) السابق:

المطلوب:

جد الحل الأمثل لمشكلة النقل، بحيث تكون تكاليف النقل أقل ما يمكن (Min)، مستخدماً طريقة عوامل الضرب.

الحل:

يوضح الجدول التالي النتائج النهائية المستحصل عليها من تطبيق طريقة (العنصر الأقل كلفة):

	مراكز الاستلام / مراكز الإنتاج	V_1 عمان (1)	V_2 الكرك (2)	V_3 اربد (3)	V_4 المفرق (4)	العرض (a_i)
U_1	الزرقاء (1)	[10] 750	[8] 250	[6] 250	[4] 250	1500
U_2	جرش (2)	[14]	[17]	[5]	[2] 1000	1000
U_3	السلط (3)	[18]	[7] 1500	[11]	[9]	1500
	الطلب (b_j)	750	1750	250	1250	4000 / 4000

وللحصول على الحل الأمثل باستخدام طريقة (عوامل الضرب)، نتبع الخطوات الآتية:

1- تخصيص المؤشرات (U_i) و (V_j) للصفوف والأعمدة على الترتيب، وتكوين عدد من العلاقات الرياضية، وفقاً للصيغة الآتية:

$$\because\ U_i + V_j = C_{ij}$$

$$\therefore\ U_1 + V_1 = C_{11} \Rightarrow \therefore\ U_1 + V_1 = 10$$

$$U_1 + V_2 = C_{12} \Rightarrow \therefore\ U_1 + V_2 = 8$$

$$U_1 + V_3 = C_{13} \Rightarrow \therefore\ U_1 + V_3 = 6$$

$$U_1 + V_4 = C_{14} \Rightarrow \therefore\ U_1 + V_4 = 4$$

$$U_2 + V_4 = C_{24} \Rightarrow \therefore\ U_2 + V_4 = 2$$

$$U_3 + V_2 = C_{32} \Rightarrow \therefore\ U_3 + V_2 = 7$$

2- إيجاد حل العلاقات الرياضية أعلاه، بعد افتراض ($U_1=0$) نحصل على:

$$0 + V_1 = 10 \Rightarrow\ \therefore\ V_1 = 10$$

$$0 + V_2 = 8 \Rightarrow\ \therefore\ V_2 = 8$$

$$0 + V_3 = 6 \Rightarrow\ \therefore\ V_3 = 6$$

$$0 + V_4 = 4 \Rightarrow\ \therefore\ V_4 = 4$$

$$U_2 + 4 = 2 \Rightarrow\ \therefore\ U_2 = -2$$

$$U_3 + 8 = 7 \Rightarrow\ \therefore\ U_3 = -1$$

3- إيجاد التكاليف الجديدة ($\hat{C}_{ij}$) للخلايا غير المملوءة كالآتي:

$$\because\ \hat{C}_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j$$

$$\therefore \hat{C}_{21} = C_{21} - U_2 - V_1$$

$$= 14- (-2) - 10$$

$$= 6$$

$$\hat{C}_{22} = C_{22} - U_2 - V_2$$

$$= 17- (-2) -8$$

$$= 11$$

$$\hat{C}_{23} = C_{23} - U_2 - V_3$$
$$= 5 - (-2) - 6$$
$$= 1$$

$$\hat{C}_{31} = C_{31} - U_3 - V_1$$
$$= 18 - (-1) - 10$$
$$= 9$$

$$\hat{C}_{33} = C_{33} - U_3 - V_3$$
$$= 11 - (-1) - 6$$
$$= 6$$

$$\hat{C}_{34} = C_{34} - U_3 - V_4$$
$$= 9 - (-1) - 4$$
$$= 6$$

4- بما أن قيم التكاليف الجديد $(\hat{C}_{ij})$ للخلايا المملوءة موجبة $(\hat{C}_{ij} > 0)$ عليه تم التوصل إلى الحل الأمثل وعنده تكون التكاليف الكلية (TC) النهائية كالآتي:

Min. Z = 24500 JD.

مثال (4):

البيانات التالية، توضح الكميات المنتجة بواسطة إحدى الشركات، والكميات المطلوبة من خلال مناطق الاستهلاك (4, 3, 2, 1)، وتكاليف نقل المنتجات من مراكز الإنتاج (1، 2،3) إلى مناطق الاستهلاك المذكورة.

مناطق الاستهلاك / مراكز الإنتاج	المنطقة (1)	المنطقة(2)	المنطقة(3)	المنطقة (4)	الكميات المنتجة (a_i)
المركز (1)	20	17	15	10	130
المركز (2)	16	14	18	13	50
المركز (3)	12	15	11	19	100
الكميات المطلوبة (b_j)	40	40	80	120	280 / 280

المطلوب:

1- جد الحل الأفضل لمشكلة النقل، مستخدماً طريقة (العنصر الأقل كلفة).

2- اختبار أمثلية الحل الأفضل باستخدام طريقة (عوامل الضرب).

الحل:

1- حل مشكلة النقل باستخدام طريقة (العنصر الأقل كلفة):

نقوم بتوزيع الكميات المنتجة (a_i)على مناطق الاستهلاك بموجب هذه الطريقة، وفقاً للصيغة الآتية:

$$X_{ij} = \text{Min}\ (a_i, b_j)$$

	مناطق الاستهلاك / مراكز الإنتاج	المنطقة (1) V_1	المنطقة (2) V_2	المنطقة (3) V_3	المنطقة (4) V_4	الكميات المنتجة (a_i)
U_1	المركز (1)	20 10	17	15	10 120	~~130~~ ~~10~~ 0
U_2	المركز (2)	16 10	14 40	18	13	~~50~~ ~~10~~ 0
U_3	المركز (3)	12 20	15	11 80	19	~~100~~ ~~20~~ 0
	الكميات المطلوبة (b_j)	~~40~~ ~~20~~ ~~10~~ 0	~~40~~ 0	~~80~~ 0	~~120~~ 0	280 280

أ - العنصر الأقل كلفة هو $(C_{14} = 10)$، عليه فإن:

$$X_{14} = \text{Min}\,(a_1, b_4)$$
$$= \text{Min}\,(130, 120)$$
$$= 120$$

ب- العنصر الأقل كلفة التالي هو $(C_{33}=11)$، عليه فإن:

$$X_{33} = \text{Min}\,(a_3, b_3)$$
$$= \text{Min}\,(100, 80)$$
$$= 80$$

جـ- العنصر الأقل كلفة التالي هو $(C_{31}=12)$، عليه فإن:

$$X_{31} = \text{Min}\,(a_3, b_1)$$
$$= \text{Min}\,(20, 40)$$
$$= 20$$

د - العنصر الأقل كلفة التالي هو $(C_{22} = 14)$، عليه فإن:

$X_{22} = Min\,(a_2, b_2)$

$= Min\,(50, 40)$

$= 40$

هـ- العنصر الأقل كلفة التالي هو ($C_{21} = 16$)، عليه فإن:

$X_{21} = Min\,(a_2, b_1)$

$= Min\,(10,20)$

$= 10$

د - العنصر الأقل كلفة التالي والأخير هو ($C_{11}=20$)، عليه فإن:

$X_{11} = Min\,(a_1, b_1)$

$= Min\,(10,10)$

$= 10$

عليه تكون التكاليف الكلية (TC)النهائية لنقل وتسـويق المنتجات مـن مراكـز الإنتاج (1، 2، 3) إلى مناطق الاستهلاك (4, 3, 2, 1)، على النحو الآتي:

$$Min.\ Z = 20*X_{11} + 10*X_{14} + 16*X_{21} + 14*X_{22} + 12*X_{31} + 11*X_{33}$$

$$= 20\,(10) + 10(120) + 16\,(10) + 14(40) + 12(20) + 11(80)$$

$$= 200 + 1200 + 160 + 560 + 240 + 880$$

$$= 3240 \text{ JD.}$$

2- إختبار أمثلية الحل الأفضل باستخدام طريقة (عوامل الضرب):

لاختبار أمثلية الحل باستخدام طريقة (عوامل الضرب)، نتبع الخطوات الآتية:

أ - تخصيص المؤشرات (U_i) للصفـوف تتمثـل بـ [U_3, U_2, U_1]، وأخـرى (V_j) للأعمدة تتمثل [V_4, V_3, V_2, V_1]، على أصل جـدول الحـل النـهائي لطريقـة (العنصر الأقل كلفة)، وكما هي موضحة على أصل الجدول السابق.

ب- اعتماد تكاليف الخلايا المملوءة (المشغولة)، لصياغة عدد من العلاقات الرياضية، وفقا للصيغة الآتية:

$\because U_i + V_j = C_{ij}$

$\therefore U_1 + V_1 = 20 \Rightarrow \quad \text{Let} \quad U_1 = 0 \rightarrow \therefore V_1 = 20$

$U_1 + V_4 = 10 \Rightarrow \quad \because \quad U_1 = 0 \rightarrow \therefore V_4 = 10$

$U_2 + V_1 = 16 \Rightarrow \quad \because \quad V_1 = 20 \rightarrow \therefore U_2 = -4$

$U_2 + V_2 = 14 \Rightarrow \quad \because \quad U_2 = -4 \rightarrow \therefore V_2 = 18$

$U_3 + V_1 = 12 \Rightarrow \quad \because \quad V_1 = 20 \rightarrow \therefore U_3 = -8$

$U_3 + V_3 = 11 \Rightarrow \quad \because \quad U_3 = -8 \rightarrow \therefore V_3 = 19$

جـ- إيجاد التكاليف الجديدة ($\hat{C}_{ij}$) للخلايا غير المملوءة (غير المشغولة)، وفقا للصيغة الآتية:

$\because \hat{C}_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j$

$\therefore \hat{C}_{12} = C_{12} - U_1 - V_2$

$= 17 - 0 - 18$

$= -1$

$\hat{C}_{13} = C_{13} - U_1 - V_3$

$= 15 - 0 - 19$

$= -4$

$\hat{C}_{23} = C_{23} - U_2 - V_3$

$= 18 - (-4) - 19$

$= 3$

$\hat{C}_{24} = C_{24} - U_2 - V_4$

$= 13 - (-4) - 10$

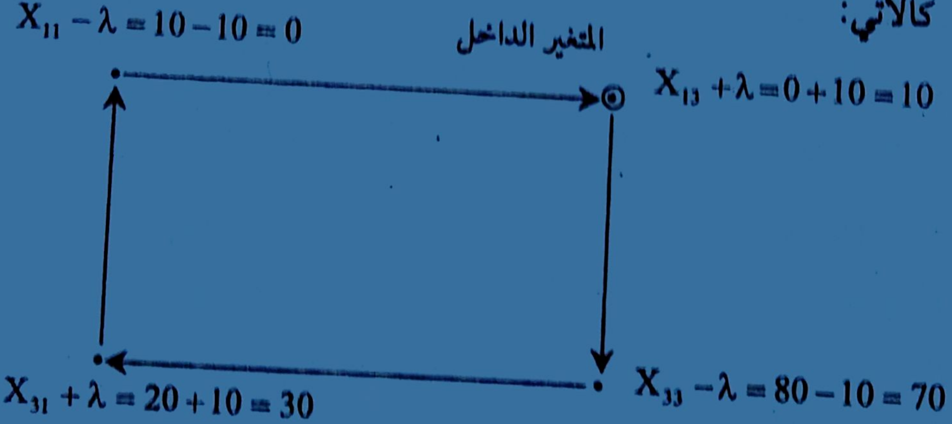
$= 7$

$$\hat{C}_{32} = C_{32} - U_3 - V_2$$
$$= 15 - (-8) - 18$$
$$= 5$$

$$\hat{C}_{34} = C_{34} - U_3 - V_4$$
$$= 19 - (-8) - 10$$
$$= 17$$

د - نظرا لحصولنا على قيم سالبة لبعض التكاليف الجديدة $(\hat{C}_{ij})$، أي أن بعض التكاليف $(\hat{C}_{ij} < 0)$، عليه فإن المتغير الداخل هو (X_{13}) كونه يقابل أكبر قيمة بإشارة سالبة، والبالغة $(\hat{C}_{13} = -4)$.

هـ- عمل مسار مغلق يبدأ بمتغير الخلية (X_{13}) وينتهي به، لتحديد المتغير الخارج كالآتي:



أن تحديد قيمة (λ) يتم على أساس أقل قيمة للمتغيرات $[X_{11}, X_{31}, X_{33}]$، أي أن:

$$\lambda = \text{Min}\,(X_{33}, X_{31}, X_{11})$$
$$= \text{Min}\,(80, 20, 10)$$
$$= 10$$

و- عمل جدول نقل جديد، يحتوي على الكميات (X_{ij}) الجديدة المعدلة، على النحو الآتي:

		V_1	V_2	V_3	V_4	
	مناطق الاستهلاك / مراكز الإنتاج	المنطقة (1)	المنطقة(2)	المنطقة(3)	المنطقة (4)	الكميات المنتجة (a_i)
U_1	المركز (1)	20	17	15 / 10	10 / 120	130
U_2	المركز (2)	16 / 10	14 / 40	18	13	50
U_3	المركز (3)	12 / 30	15	11 / 70	19	100
	الكميات المطلوبة (b_j)	40	40	80	120	280 / 280

نقوم بإعادة نفس الخطوات السابقة على تكاليف الجدول الجديـد، حتـى يتـم الحصول على جميع قيم التكاليف الجديدة ($\hat{C}_{ij}$) موجبة، أي أن $\left(\hat{C}_{ij} > 0\right)$، وكالآتي:

$\because\ U_i + V_i = C_{ij}$

$\therefore\ U_1 + V_3 = 15 \ \Rightarrow\ \text{Let } U_1 = 0 \ \rightarrow \therefore\ V_3 = 15$

$U_1 + V_4 = 10 \ \Rightarrow\ \because\ U_1 = 0 \ \rightarrow \therefore\ V_4 = 10$

$U_2 + V_1 = 16 \ \Rightarrow\ \because\ V_1 = 16 \rightarrow \therefore\ U_2 = 0$

$U_2 + V_2 = 14 \ \Rightarrow\ \because\ U_2 = 0 \ \rightarrow \therefore\ V_1 = 14$

$U_3 + V_1 = 12 \ \Rightarrow\ \because\ U_3 = -4 \rightarrow \therefore\ V_1 = 16$

$U_3 + V_3 = 11 \ \Rightarrow\ \because\ V_3 = 15 \rightarrow \therefore\ U_3 = -4$

بعد ذلك نقوم بإيجاد التكاليف الجديدة ($\hat{C}_{ij}$)، كالآتي:

$\because\ \hat{C}_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j$

$\therefore\ \hat{C}_{11} = C_{11} - U_1 - V_1 = 20 - 0 - 16 = 4$

$$\hat{C}_{12} = C_{12} - U_1 - V_2 = 17 - 0 - 14 = 3$$

$$\hat{C}_{23} = C_{23} - U_2 - V_3 = 18 - 0 - 15 = 3$$

$$\hat{C}_{24} = C_{24} - U_2 - V_4 = 13 - 0 - 10 = 3$$

$$\hat{C}_{32} = C_{32} - U_3 - V_2 = 15 - (-4) - 14 = 5$$

$$\hat{C}_{34} = C_{34} - U_3 - V_4 = 19 - (-4) - 10 = 13$$

يتضح من أعلاه بأن جميع قيم التكاليف الجديدة ($\hat{C}_{ij}$) موجبة، أي أن ($\hat{C}_{ij} > 0$)، عليه فقد تم التوصل إلى الحل الأمثل باستخدام طريقة (عوامل الضرب)، وبالتالي فإن التكاليف الكلية النهائية (TC) تكون كالآتي:

$$\text{Min. } Z = 15\,(10) + 10\,(120) + 16\,(10) + 14(40) + 12\,(30) + 11(70)$$

$$= 150 + 1200 + 160 + 560 + 360 + 770$$

$$= 3200 \quad \text{JD.}$$

وبمقارنة التكاليف النهائية (Z) لطريقة (عوامل الضرب) والبالغة (3200) دينار مع التكاليف النهائية (Z) لطريقة (العنصر الأقل كلفة) والبالغة (3240)) دينار، نجد بأن تكاليف طريقة (عوامل الضرب) تقل بمقدار (40)دينار عن تكاليف طريقة (العنصر الأقل كلفة).