الفصل الخامس

نموذج النقل

The Transporation Model

5-1: مقدمة:

تُعد نماذج النقل أحد الأساليب الرياضية الكمية المشتقة من النموذج الرياضي العام للبرمجة الخطية (LP)، وذات أهمية كبيرة في دراسة إدارة الأعمال الإنتاجية والخدمية واتخاذ القرارات المتعلقة بنقل وتسويق السلع والبضائع المختلفة من مصادر إنتاجها إلى مراكز الاستلام (الاستهلاك) بهدف إيصالها إلى المستهلك الأخير بأقل كلفة ممكنة.

5-2: صياغة النموذج الرياضي لمشكلة النقل:

قبل البدء بصياغة النموذج الرياضي لمشكلة النقل، لابد من توضيح وتعريف مكونات جدول النقل الآتي:

Demand مراكز الطلب / Supply مراكز العرض	D_1	D_2	…	D_j	…	D_n	العرض (a_i)
S_1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	….	C_{1j} X_{1j}	…	C_{1n} X_{1n}	a_1
S_2	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}		C_{2j} X_{2j}		C_{2n} X_{2n}	a_2
⋮	…	…	…	…	…	…	…
S_i	C_{i1} X_{i1}	C_{i2} X_{i2}		C_{ij} X_{ij}		C_{in} X_{in}	a_i
⋮	…	…	…	…	…	…	…
S_m	C_{m1} X_{m1}	C_{m2} X_{m2}	…	C_{mj} X_{mj}	…	C_{mn} X_{mn}	a_m
الطلب (b_j)	b_1	b_2	…	b_j	…	b_n	$\sum_{i}^{m} a_i$ / $\sum_{j}^{n} b_j$

حيث أن:

$$i = 1,2,3, \ldots, m$$
$$j = 1,2,3, \ldots, n$$

إذ أن:

S_i : يمثل مركز توزيع السلع والبضائع رقم (i).

D_j : يمثل مركز استلام السلع والبضائع رقم (j).

C_{ij} : يمثل تكاليف نقل وتسويق السلع والبضائع من مركز التوزيع (i) إلى مركز الاستلام (j).

X_{ij} : كمية السلع والبضائع المسوقة من مركز التوزيع (i) إلى مركز الاستلام (j).

a_i : كمية البضاعة المعروضة من مركز التوزيع (i).

b_j : كمية البضاعة المطلوبة من مركز الاستلام (j).

وفي ضوء ما تقدم، واعتماداً على المعطيات الواردة في الجدول السابق، يمكن صياغة النموذج الرياضي لمشكلة النقل باستخدام إحدى الطريقتين الآتيتين:

1- الطريقة الأولى:

اولا: دالة الهدف:

$$\text{Min. } Z = C_{11}X_{11} + C_{12}X_{12} + C_{13}X_{13} + \ldots + C_{mn}X_{mn}$$

ثانيا: قيود النموذج:

أ - قيود مراكز التوزيع:

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} + \ldots + X_{1n} = a_1$$
$$X_{21} + X_{22} + X_{23} + \ldots + X_{2n} = a_2$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$X_{m1} + X_{m2} + X_{m3} + \ldots + X_{mn} = a_m$$

ب- قيود مراكز الاستلام:

$$X_{11}+X_{21}+X_{31}+\ldots+X_{m1}=b_1$$
$$X_{12}+X_{22}+X_{32}+\ldots+X_{m2}=b_2$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$X_{1n}+X_{2n}+X_{3n}+\ldots+X_{mn}=b_n$$

ثالثاً: قيد عدم السلبية:

$$X_{11}, X_{12}, X_{13}, \ldots, X_{mn} \geq 0$$

2- الطريقة المختصرة:

أولاً: دالة الهدف:

$$\text{Min. } Z=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} C_{ij} X_{ij}$$

ثانياً: قيود النموذج:

أ- قيود مراكز التوزيع:

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij}=a_i \quad , \quad i=1,2,3,\ldots,m$$

ب- قيود مراكز الاستلام:

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij}=b_j \quad , \quad j=1,2,3,\ldots,n$$

ثالثاً: قيد عدم السلبية:

$$X_{ij} \geq 0 \quad , \quad \forall i, j$$

3-5 : أنواع مشاكل النقل:

تنقسم مشاكل النقل من حيث توازن جدول النقل أو عدم توازنه إلى ما يأتي:

1-3-5: مشاكل النقل المغلق Closed Transportation Problems:

يكون مجموعه الكميات المعروضة من قبل مراكز التوزيع، بموجب هذا النوع من مشاكل النقل مساوية إلى الكميات المطلوبة من قبل مراكز الاستلام، وهذا يعني بأن جدول النقل في حالة توازن، أي أن:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

2-3-5: مشاكل النقل المفتوح Opened Transportation Problems:

بموجب هذا النوع من مشاكل النقل، يكون مجموع الكميات المعروضة غير مساوياً إلى مجموع الكميات المطلوبة، وفي هذه الحالة أما أن يكون مجموع الكميات المعروضة أكبر من مجموع الكميات المطلوبة أو بالعكس، وهذا يعني بأن جدول النقل في حالة عدم توازن، ويمكن توضيح ذلك من خلال العلاقات الرياضية الآتية:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$$

وتكون العلاقة أعلاه، على حالتين هما:

1) $$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$$

وبما أن مشكلة النقل لا يمكن حلها إلا عندما يكون جدول النقل في حالة التوازن، عليه لابد من معالجة الحالة أعلاه وتحويلها إلى حالة التوازن، على النحو الآتي:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j + D_0$$

إذ أن:

D_0 : يمثل مركز استلام وهمي بكلف مساوية للصفر.

2) $$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$$

لمعالجة الحالة أعلاه وتحويلها إلى حالة التوازن، نقوم بالإجراء الآتي:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i + S_0 = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

إذ أن:

S_0 : يمثل مركز توزيع وهمي بكلف مساوية للصفر.

4-5: الطرق المستخدمة لحل مشاكل النقل:

من أجل التوصل إلى حل مشاكل النقل، لابد من اعتماد طريقة واحدة لكل نوع من أنواع الحلول الآتية:

أولاً: طرق إيجاد الحل الممكن Feasible Solution Methods:

1- طريقة الركن الشمالي الغربي North - West Corner Method.

2- طريقة التوزيع العشوائي Random Distribution Method.

ثانياً: طرق إيجاد الحل الأفضل Best Solution Methods:

1- طريقة العنصر الأقل كلفة Least Cost Method.

2- طريقة فوجل Vogel's Method.

ثالثاً: طرق إيجاد الحل الأمثل Optimal Solution Methods:

1- طريقة عوامل الضرب Multipliers Method.

2- طريقة المسار المتعرج Stepping Stone Method.

وفيما يلي شرحاً مفصلاً لطريقة واحدة لكل نوع من الحلول الثلاثة أعلاه، وكالآتي:

1-4-5: إيجاد الحل الممكن:

لإيجاد الحل الممكن (Feasible Solution) لمشكلة النقل، نقوم باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي، والتي يمكن توضحها كالآتي:

- **طريقة الركن الشمالي العربي The North - West Corner Method:**

تُعد هذه الطريقة من أبسط طرق حل مشاكل النقل، وأن تطبيق هذه الطريقة ينطلق من اختيار خلية النقل الأولى والتي تقع في الصف الأول (الشمالي) والعمود الأول (الغربي) من جدول النقل، معتمدين بذلك العلاقة الرياضية الآتية:

$$\boxed{X_{11} = \text{Min}\,(a_1, b_1)}$$

مع مراعاة تخصيص أقل الكميتين (a_1) و (b_1) للخلية (X_{11})، وتعديل كمية العرض والطلب للجدول بعد الانتهاء من تخصيص الكمية المطلوبة.

وبعد التأكد من أن جميع الكميات المعروضة من قبل مراكز التوزيع قد نفذت، تكون في هذه الحالة قد توصلنا إلى الحل الممكن لمشكلة النقل، بموجب هذه الطريقة.

مثال (1):

البيانات التالية، تمثل الكميات المعروضة من مراكز التوزيع والكميات المطلوبة من مراكز الاستلام، ومصفوفة تكاليف نقل الطن الواحد من مادة الإسمنت المقاوم من مصادر إنتاجها إلى مراكز الاستلام، ليتم توزيعها على تجار التجزئة.

مراكز التوزيع	الكميات المعروضة		مراكز الاستلام	الكميات المطلوبة
الزرقاء (1)	1500 طن		عمان (1)	750 طن
جرش (2)	1000 طن		الكرك (2)	1750 طن
السلط (3)	1500 طن		اربد (3)	250 طن
			المفرق (4)	250 طن

وإن مصفوفة تكاليف النقل (C_{ij}) هي:

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} 10 & 8 & 6 & 4 \\ 14 & 17 & 5 & 2 \\ 18 & 7 & 11 & 9 \end{bmatrix}$$

المطلوب:

جد الحل الممكن للمشكلة بحيث تكون تكاليف النقل أقل ما يمكن (Min)، مستخدماً طريقة الركن الشمالي الغربي.

الحل:

نقوم بتفريغ البيانات أعلاه، في جدول النقل الآتي:

مراكز الاستلام / مراكز التوزيع	عمان (1)	الكرك (2)	اربد (3)	العقبة (4)	العرض (a_i)
الزرقاء (1)	10 X_{11} 750	8 750	6	4	~~1500~~ ~~750~~ 0
جرش (2)	14	17 1000	5	2	~~1000~~ 0
السلط (3)	18	7	11 250	9 1250	~~1500~~ ~~1250~~ 0
الطلب (b_j)	~~750~~ 0	~~1750~~ ~~1000~~ 0	~~250~~ 0	~~1250~~ 0	4000 / 4000

نبدأ بالخلية (X_{11}) التي تقع في الركن الشمالي الغربي، ونقوم بتحديد الكمية المطلوب تخصيصها لهذه الخلية وفقاً للعلاقة الرياضية الآتية:

$$\begin{aligned} X_{11} &= \text{Min}(a_1, b_1) \\ &= \text{Min}(1500, 750) \\ &= 750 \end{aligned}$$

نقوم بوضع الكمية (750)طن في الخلية (X_{11})، ويتم طرحها من الكمية المعروضة من مركز الزرقاء (1) وكذلك من الكمية المطلوبة من مركز عمان (1)،

وهكذا نستمر بعملية التخصيص حتى ننتهي من توزيع جميع الكميات المعروضة من قبل مراكز التوزيع على مراكز الاستلام، وعلى النحو الآتي:

$$X_{12} = \text{Min}(a_1, b_2)$$
$$= \text{Min}(750, 1750)$$
$$= 750$$

$$X_{22} = \text{Min}(a_2, b_2)$$
$$= \text{Min}(1000, 1000)$$
$$= 1000$$

$$X_{33} = \text{Min}(a_3, b_3)$$
$$= \text{Min}(1500, 250)$$
$$= 250$$

$$X_{34} = \text{Min}(a_3, b_4)$$
$$= \text{Min}(1250, 1250)$$
$$= 1250$$

عليه تكون التكاليف النهائية (Total Costs) لعملية نقل مادة الإسمنت المقاوم كالآتي:

$$\text{Min. } Z = 10X_{11} + 8X_{12} + 17X_{22} + 11X_{33} + 9X_{34}$$
$$= 10\,(750) + 8\,(750) + 17(1000) + 11(\,250) + 9\,(1250)$$
$$= 44500 \text{ JD.}$$

5-4-2: إيجاد الحل الأفضل:

لإيجاد الحل الأفضل (Best Solution) لمشكلة النقل، نستخدم لذلك طريقة العنصر الأقل كلفة، والتي يمكن توضيحها على النحو الآتي:

- **طريقة العنصر الأقل كلفة The Least Cost Method:**

أن من المآخذ على طريقة الركن الشمالي الغربي هو عدم الاستفادة من كلف النقل القليلة في مصفوفة التكاليف (C_{ij}) عند نقل وتسويق الكميات المطلوبة من مراكز الاستلام (الطلب)، أو إن عدد الخانات المملوءة بالكميات المسوقة لا تحقق العلاقة ($n + m-1$)، مما يتطلب البحث عن طريقة بديلة لتحسين الحل والوصول إلى الحل الأمثل، ويتمثل ذلك بطريقة العنصر الأقل كلفة.

ولإيجاد الحل الأفضل بموجب هذه الطريقة، نتبع الخطوات الآتية:

1- اختيار العنصر الأقل كلفة في مصفوفة تكاليف جدول النقل (C_{ij})، وتحديد الكمية المطلوب تسويقها (X_{ij}) إلى مركز الاستلام، وفقاً للعلاقة الرياضية الآتية:

$$X_{ij} = \text{Min}\ (a_i, b_j)$$

مع مراعاة تعديل الكميات المعروضة (a_i) والكميات المطلوبة (b_j) بعد كل عملية تخصيص (تسويق).

2- بعد ذلك يتم اختيار العنصر الأقل كلفة التالي في مصفوفة التكاليف (C_{ij})، وتحديد الكمية المطلوب تسويقها (X_{ij}) إلى مركز الاستلام الآخر وفقاً للعلاقة الرياضية السابقة، وهكذا حتى يتم التحقق من تسويق جميع الكميات المعروضة، وبهذا نكون قد توصلنا إلى الحل الأفضل لمشكلة النقل.

مثال (2):

جد الحل الأفضل لبيانات مشكلة النقل الواردة في المثال (1)، مستخدماً طريقة العنصر الأقل كلفة بحيث تكون تكاليف النقل أقل ما يمكن (Min):

الحل:

مراكز الاستلام / مراكز الإنتاج	عمان (1)	الكرك (2)	اربد (3)	المفرق (4)	العرض (a_i)
الزرقاء (1)	10 750	8 250	6 250	4 250	~~1500~~ ~~1250~~ ~~1000~~ ~~750~~ 0
جرش (2)	14	17	5	2 1000	~~1000~~ 0
السلط (3)	18	7 1500	11	9	~~1500~~ 0
الطلب (b_j)	~~750~~ 0	~~1750~~ ~~250~~ 0	~~250~~ 0	~~1250~~ ~~250~~ 0	4000 4000

1- اختيار العنصر الأقل كلفة وهو ($C_{24} = 2$)، عليه فإن:

$$X_{24} = \text{Min}\,(a_2, b_4)$$
$$= \text{Min}\,(1000, 1250)$$
$$= 1000$$

2- العنصر الأقل كلفة التالي هو ($C_{14}=4$)، عليه فإن:

$$X_{14} = \text{Min}\,(a_1, b_4)$$
$$= \text{Min}\,(1500, 250)$$
$$= 250$$

3- العنصر الأقل كلفة التالي هو ($C_{13} = 6$)، عليه فإن:

$$X_{13} =- \text{Min}\,(a_1, b_3)$$
$$= \text{Min}\,(1250, 250)$$
$$= 250$$

4- العنصر الأقل كلفة التالي هو ($C_{32}=7$)، عليه فإن:

8- نقوم بإعادة نفس الخطوات السابقة، حتى تيم الحصول على قيم موجبة للتكاليف الجديدة $(\hat{C}_{ij})$ أي ان $(\hat{C}_{ij} \geq 0)$ والتي من خلالها يتحقق الحصول على الحل الأمثل للمشكلة.

مثال (3):

استخدم النتائج النهائية المستحصل عليها بموجب طريقة العنصر الأقل كلفة الواردة في المثال (2) السابق:

المطلوب:

جد الحل الأمثل لمشكلة النقل، بحيث تكون تكاليف النقل أقل ما يمكن (Min)، مستخدماً طريقة عوامل الضرب.

الحل:

يوضح الجدول التالي النتائج النهائية المستحصل عليها من تطبيق طريقة (العنصر الأقل كلفة):

	مراكز الاستلام / مراكز الإنتاج	V_1 عمان (1)	V_2 الكرك (2)	V_3 اربد (3)	V_4 المفرق (4)	العرض (a_i)
U_1	الزرقاء (1)	$\boxed{10}$ 750	$\boxed{8}$ 250	$\boxed{6}$ 250	$\boxed{4}$ 250	1500
U_2	جرش (2)	$\boxed{14}$	$\boxed{17}$	$\boxed{5}$	$\boxed{2}$ 1000	1000
U_3	السلط (3)	$\boxed{18}$	$\boxed{7}$ 1500	$\boxed{11}$	$\boxed{9}$	1500
	الطلب (b_j)	750	1750	250	1250	4000 / 4000

وللحصول على الحل الأمثل باستخدام طريقة (عوامل الضرب)، نتبع الخطوات الآتية:

1- تخصيص المؤشرات (U_i) و (V_j) للصفوف والأعمدة على الترتيب، وتكوين عدد من العلاقات الرياضية، وفقاً للصيغة الآتية:

$$\because U_i + V_j = C_{ij}$$

$$\therefore U_1 + V_1 = C_{11} \Rightarrow \therefore U_1 + V_1 = 10$$

$$U_1 + V_2 = C_{12} \Rightarrow \therefore U_1 + V_2 = 8$$

$$U_1 + V_3 = C_{13} \Rightarrow \therefore U_1 + V_3 = 6$$

$$U_1 + V_4 = C_{14} \Rightarrow \therefore U_1 + V_4 = 4$$

$$U_2 + V_4 = C_{24} \Rightarrow \therefore U_2 + V_4 = 2$$

$$U_3 + V_2 = C_{32} \Rightarrow \therefore U_3 + V_2 = 7$$

2- إيجاد حل العلاقات الرياضية أعلاه، بعد افتراض ($U_1=0$) لنحصل على:

$$0 + V_1 = 10 \Rightarrow \therefore V_1 = 10$$

$$0 + V_2 = 8 \Rightarrow \therefore V_2 = 8$$

$$0 + V_3 = 6 \Rightarrow \therefore V_3 = 6$$

$$0 + V_4 = 4 \Rightarrow \therefore V_4 = 4$$

$$U_2 + 4 = 2 \Rightarrow \therefore U_2 = -2$$

$$U_3 + 8 = 7 \Rightarrow \therefore U_3 = -1$$

3- إيجاد التكاليف الجديدة $(\hat{C}_{ij})$ للخلايا غير المملوءة كالآتي:

$$\because \hat{C}_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j$$

$$\therefore \hat{C}_{21} = C_{21} - U_2 - V_1$$

$$= 14 - (-2) - 10$$

$$= 6$$

$$\hat{C}_{22} = C_{22} - U_2 - V_2$$

$$= 17 - (-2) - 8$$

$$= 11$$

$\hat{C}_{23} = C_{23} - U_2 - V_3$

$= 5 - (-2) - 6$

$= 1$

$\hat{C}_{31} = C_{31} - U_3 - V_1$

$= 18 - (-1) - 10$

$= 9$

$\hat{C}_{33} = C_{33} - U_3 - V_3$

$= 11 - (-1) - 6$

$= 6$

$\hat{C}_{34} = C_{34} - U_3 - V_4$

$= 9 - (-1) - 4$

$= 6$

4- بما أن قيم التكاليف الجديد $(\hat{C}_{ij})$ للخلايا المملوءة موجبة $(\hat{C}_{ij} > 0)$ عليه تم التوصل إلى الحل الأمثل وعنده تكون التكاليف الكلية (TC) النهائية كالآتي:

Min. Z = 24500 JD.

مثال (4):

البيانات التالية، توضح الكميات المنتجة بواسطة إحدى الشركات، والكميات المطلوبة من خلال مناطق الاستهلاك (4, 3, 2, 1)، وتكاليف نقل المنتجات من مراكز الإنتاج (1، 2، 3) إلى مناطق الاستهلاك المذكورة.

مناطق الاستهلاك / مراكز الإنتاج	المنطقة (1)	المنطقة(2)	المنطقة(3)	المنطقة (4)	الكميات المنتجة (a_i)
المركز (1)	20	17	15	10	130
المركز (2)	16	14	18	13	50
المركز (3)	12	15	11	19	100
الكميات المطلوبة (b_j)	40	40	80	120	280 / 280

المطلوب:

1- جد الحل الأفضل لمشكلة النقل، مستخدماً طريقة (العنصر الأقل كلفة).

2- اختبار أمثلية الحل الأفضل باستخدام طريقة (عوامل الضرب).

الحل:

1- حل مشكلة النقل باستخدام طريقة (العنصر الأقل كلفة):

نقوم بتوزيع الكميات المنتجة (a_i)على مناطق الاستهلاك بموجب هذه الطريقة، وفقاً للصيغة الآتية:

$$X_{ij} = \text{Min}\ (a_i, b_j)$$

	مناطق الاستهلاك / مراكز الإنتاج	V_1 المنطقة (1)	V_2 المنطقة(2)	V_3 المنطقة(3)	V_4 المنطقة (4)	الكميات المنتجة (a_i)
U_1	المركز (1)	20 10	17	15	10 120	~~130~~ ~~10~~ 0
U_2	المركز (2)	16 10	14 40	18	13	~~50~~ ~~10~~ 0
U_3	المركز (3)	12 20	15	11 80	19	~~100~~ ~~20~~ 0
	الكميات المطلوبة (b_j)	~~40~~ ~~20~~ ~~10~~ 0	~~40~~ 0	~~80~~ 0	~~120~~ 0	280 280

أ - العنصر الأقل كلفة هو $(C_{14} = 10)$، عليه فإن:

$$X_{14} = \text{Min}\ (a_1, b_4)$$
$$= \text{Min}\ (130, 120)$$
$$= 120$$

ب- العنصر الأقل كلفة التالي هو $(C_{33}=11)$، عليه فإن:

$$X_{33} = \text{Min}\ (a_3, b_3)$$
$$= \text{Min}\ (100, 80)$$
$$= 80$$

جـ- العنصر الأقل كلفة التالي هو $(C_{31}=12)$، عليه فإن:

$$X_{31} = \text{Min}\ (a_3, b_1)$$
$$= \text{Min}\ (20, 40)$$
$$= 20$$

د - العنصر الأقل كلفة التالي هو $(C_{22} = 14)$، عليه فإن:

$X_{22} = Min(a_2, b_2)$

$= Min(50, 40)$

$= 40$

هـ- العنصر الأقل كلفة التالي هو ($C_{21} = 16$)، عليه فإن:

$X_{21} = Min(a_2, b_1)$

$= Min(10,20)$

$= 10$

د - العنصر الأقل كلفة التالي والأخير هو ($C_{11}=20$)، عليه فإن:

$X_{11} = Min(a_1, b_1)$

$= Min(10,10)$

$= 10$

عليه تكون التكاليف الكلية (TC)النهائية لنقل وتسويق المنتجات من مراكز الإنتاج (1، 2، 3) إلى مناطق الاستهلاك (4, 3, 2, 1)، على النحو الآتي:

$$Min.\ Z = 20*X_{11} + 10*X_{14} + 16*X_{21} + 14*X_{22} + 12*X_{31} + 11*X_{33}$$

$$= 20(10) + 10(120) + 16(10) + 14(40) + 12(20) + 11(80)$$

$$= 200 + 1200 + 160 + 560 + 240 + 880$$

$$= 3240 \text{ JD.}$$

2- إختبار أمثلية الحل الأفضل باستخدام طريقة (عوامل الضرب):

لاختبار أمثلية الحل باستخدام طريقة (عوامل الضرب)، نتبع الخطوات الآتية:

أ - تخصيص المؤشرات (U_i) للصفوف تتمثل بـ [U_3, U_2, U_1]، وأخرى (V_j) للأعمدة تتمثل [V_4, V_3, V_2, V_1]، على أصل جدول الحل النهائي لطريقة (العنصر الأقل كلفة)، وكما هي موضحة على أصل الجدول السابق.

ب- اعتماد تكاليف الخلايا المملوءة (المشغولة)، لصياغة عدد من العلاقات الرياضية، وفقا للصيغة الآتية:

$\because U_i + V_j = C_{ij}$

$\therefore U_1 + V_1 = 20 \Rightarrow$ Let $U_1 = 0 \rightarrow \therefore V_1 = 20$

$U_1 + V_4 = 10 \Rightarrow \because U_1 = 0 \rightarrow \therefore V_4 = 10$

$U_2 + V_1 = 16 \Rightarrow \because V_1 = 20 \rightarrow \therefore U_2 = -4$

$U_2 + V_2 = 14 \Rightarrow \because U_2 = -4 \rightarrow \therefore V_2 = 18$

$U_3 + V_1 = 12 \Rightarrow \because V_1 = 20 \rightarrow \therefore U_3 = -8$

$U_3 + V_3 = 11 \Rightarrow \because U_3 = -8 \rightarrow \therefore V_3 = 19$

جـ- إيجاد التكاليف الجديدة ($\hat{C}_{ij}$) للخلايا غير المملوءة (غير المشغولة)، وفقا للصيغة الآتية:

$\because \hat{C}_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j$

$\therefore \hat{C}_{12} = C_{12} - U_1 - V_2$

$= 17 - 0 - 18$

$= -1$

$\hat{C}_{13} = C_{13} - U_1 - V_3$

$= 15 - 0 - 19$

$= -4$

$\hat{C}_{23} = C_{23} - U_2 - V_3$

$= 18 - (-4) - 19$

$= 3$

$\hat{C}_{24} = C_{24} - U_2 - V_4$

$= 13 - (-4) - 10$

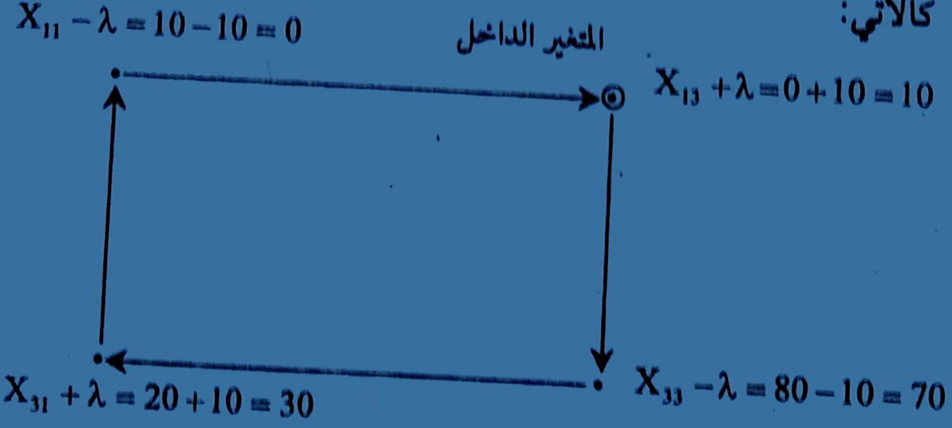
$= 7$

$$\hat{C}_{32} = C_{32} - U_3 - V_2$$
$$= 15 - (-8) - 18$$
$$= 5$$

$$\hat{C}_{34} = C_{34} - U_3 - V_4$$
$$= 19 - (-8) - 10$$
$$= 17$$

د - نظرا لحصولنا على قيم سالبة لبعض التكاليف الجديدة $(\hat{C}_{ij})$، أي أن بعض التكاليف $(\hat{C}_{ij} < 0)$، عليه فإن المتغير الداخل هو (X_{13}) كونه يقابل أكبر قيمة بإشارة سالبة، والبالغة $(\hat{C}_{13} = -4)$.

هـ- عمل مسار مغلق يبدأ بمتغير الخلية (X_{13}) وينتهي به، لتحديد المتغير الخارج كالآتي:



أن تحديد قيمة (λ) يتم على أساس أقل قيمة للمتغيرات $[X_{11}, X_{31}, X_{33}]$، أي أن:

$$\lambda = \text{Min}\,(X_{33}, X_{31}, X_{11})$$
$$= \text{Min}\,(80, 20, 10)$$
$$= 10$$

و- عمل جدول نقل جديد، يحتوي على الكميات (X_{ij}) الجديدة المعدلة، على النحـو الآتي:

		V_1	V_2	V_3	V_4	
	مناطق الاستهلاك / مراكز الإنتاج	المنطقة (1)	المنطقة (2)	المنطقة (3)	المنطقة (4)	الكميات المنتجة (a_i)
U_1	المركز (1)	20	17	15 / 10	10 / 120	130
U_2	المركز (2)	16 / 10	14 / 40	18	13	50
U_3	المركز (3)	12 / 30	15	11 / 70	19	100
	الكميات المطلوبة (b_j)	40	40	80	120	280 / 280

نقوم بإعادة نفس الخطوات السابقة على تكاليف الجدول الجديـد، حتـى يتـم الحصول على جميع قيم التكاليف الجديدة ($\hat{C}_{ij}$) موجبة، أي أن ($\hat{C}_{ij} > 0$)، وكالآتي:

$$\because\ U_i + V_i = C_{ij}$$

$$\therefore\ U_1 + V_3 = 15 \Rightarrow \text{Let } U_1 = 0 \rightarrow \therefore\ V_3 = 15$$

$$U_1 + V_4 = 10 \Rightarrow \because\ U_1 = 0 \rightarrow \therefore\ V_4 = 10$$

$$U_2 + V_1 = 16 \Rightarrow \because\ V_1 = 16 \rightarrow \therefore\ U_2 = 0$$

$$U_2 + V_2 = 14 \Rightarrow \because\ U_2 = 0 \rightarrow \therefore\ V_1 = 14$$

$$U_3 + V_1 = 12 \Rightarrow \because\ U_3 = -4 \rightarrow \therefore\ V_1 = 16$$

$$U_3 + V_3 = 11 \Rightarrow \because\ V_3 = 15 \rightarrow \therefore\ U_3 = -4$$

بعد ذلك نقوم بإيجاد التكاليف الجديدة ($\hat{C}_{ij}$)، كالآتي:

$$\because\ \hat{C}_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j$$

$$\therefore\ \hat{C}_{11} = C_{11} - U_1 - V_1 = 20 - 0 - 16 = 4$$

$$\hat{C}_{12} = C_{12} - U_1 - V_2 = 17 - 0 - 14 = 3$$

$$\hat{C}_{23} = C_{23} - U_2 - V_3 = 18 - 0 - 15 = 3$$

$$\hat{C}_{24} = C_{24} - U_2 - V_4 = 13 - 0 - 10 = 3$$

$$\hat{C}_{32} = C_{32} - U_3 - V_2 = 15 - (-4) - 14 = 5$$

$$\hat{C}_{34} = C_{34} - U_3 - V_4 = 19 - (-4) - 10 = 13$$

يتضح من أعـلاه بـأن جميع قيـم التكـاليف الجديـدة ($\hat{C}_{ij}$) موجبـة، أي أن ($\hat{C}_{ij} > 0$)، عليه فقد تم التوصل إلى الحل الأمثل باستخدام طريقة (عوامـل الضـرب)، وبالتالي فإن التكاليف الكلية النهائية (TC) تكون كالآتي:

$$\text{Min. } Z = 15\ (10) + 10\ (120) + 16\ (10) + 14(40) + 12\ (30) + 11(70)$$

$$= 150 + 1200 + 160 + 560 + 360 + 770$$

$$= 3200 \quad \text{JD.}$$

وبمقارنة التكاليف النهائية (Z) لطريقة (عوامل الضرب) والبالغة (3200) دينار مع التكاليف النهائية (Z) لطريقة (العنصر الأقل كلفة) والبالغة (3240)) دينـار، نجد بأن تكاليف طريقة (عوامـل الضـرب) تقـل بمقـدار (40)دينـار عـن تكـاليف طريقـة (العنصر الأقل كلفة).