النموذج المقابل The Dual Model

لكل نموذج اولي (Primal Model) من نماذج البرمجة الخطية يوجد نموذج مقابل (Dual Model). حيث لكل نموذج برمجة خطية بصيغة (Max.) يوجد له نموذج مقابل بصيغة (Min.) والعكس صحيح. ان اهمية النموذج المقابل هي انه في بعض الاحيان يكون الحل للنموذج المقابل اسهل من الحل للنموذج الاولي.

خطوات تكوين النموذج المقابل

يتم ايجاد النموذج المقابل لأي نموذج اولي باتباع الخطوات الاتية:

1. اذا كانت دالة الهدف في النموذج الاولي بصيغة (Max.) فيتم تحويلها الى صيغة (Min.) في النموذج المقابل. والعكس صحيح، اي كانت دالة الهدف في النموذج الاولي بصيغة (Min.) فيتم تحويلها الى صيغة (Max.) في النموذج المقابل. مع تغيير حرف دالة الهدف من (Z) الى (W).
2. تغيير احرف متغيرات المشكلة من (X) الى (Y) .
3. الثوابت التي تقع في الجانب الايمن من القيود في النموذج الاولي تعتبر كمعاملات للمتغيرات في دالة الهدف للنموذج المقابل. اي ان :

عدد القيود في النموذج الاولي = عدد المتغيرات في النموذج المقابل

4. معاملات المتغيرات في دالة الهدف للنموذج الاولي تعتبر كثوابت للجانب الايمن من القيود في النموذج المقابل. اي ان:

عدد المتغيرات في النموذج الاولي = عدد القيود في النموذج المقابل

5. ابدال مصفوفة معاملات المتغيرات في قيود النموذج الاولي بحيث تصبح الصفوف اعمدة والاعمدة صفوف، وكالاتي:
   i. معاملات المتغير (X_1) في النموذج الاولي تكون معاملات المتغيرات للقيد الاول في النموذج المقابل.
   ii. معاملات المتغير (X_2) في النموذج الاولي تكون معاملات المتغيرات للقيد الثاني في النموذج المقابل. وهكذا بالنسبة لبقية المتغيرات.
6. تغيير علامة القيود كالاتي:
   i. علامة الاكبر او يساوي في النموذج الاولي تتغير الى اصغر او يساوي في النموذج المقابل.

$X_2 \leq 7$

$X_1, X_2 \geq 0$

iii. $Max.Z = 30X_1 + 10X_2$

Sub. to:

$2X_1 + 4X_2 \leq 20$

$4X_1 + 2X_2 \leq 20$

$X_2 \leq 7$

$X_1, X_2 \geq 0$

ii. علامة الاصغر او يساوي في النموذج الاولي تتغير الى اكبر او يساوي في النموذج المقابل.

iii. علامة المساواة في النموذج الاولي تتغير الى قيدين الاول تكون علامته الاصغر والثاني علامته الاكبر في النموذج المقابل.

7. اضافة شرط اللاسلبية لمتغيرات النموذج المقابل.

خصائص النموذج المقابل

1. النموذج المقابل للنموذج المقابل هو النموذج الاولي.
2. اذا كان للنموذج الاولي حل فان للنموذج المقابل حل ايضا.
3. عند ايجاد الحل الامثل للنموذج المقابل فانه يمكن ايجاد الحل الامثل للنموذج الاولي مباشرة من جدول الحل النهائي والذي يتمثل بمعاملات المتغيرات الراكدة في دالة الهدف.
4. اذا كانت دالة الهدف في النموذج الاولي (Max.) فان دالة الهدف في النموذج المقابل (Min.). والعكس صحيح.
5. عدد القيود في النموذج الاولي = عدد المتغيرات في النموذج المقابل.
6. عدد المتغيرات في النموذج الاولي = عدد القيود في النموذج المقابل.

مثال (3.2)

اوجد النموذج المقابل لنموذج البرمجة الخطية الاتي:

$$Max.Z = 15X_1 + 10X_2$$

Sub. to:

$$3X_1 + 5X_2 \leq 30$$

$$4X_1 + 6X_2 \leq 40$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

الحل:

$$Min.W = 30Y_1 + 40Y_2$$

Sub. to:

$$3Y_1 + 4Y_2 \geq 15$$

$$5Y_1 + 6Y_2 \geq 10$$

$$Y_1, Y_2 \geq 0$$

مثال (4.2)

اوجد النموذج المقابل لنموذج البرمجة الخطية الاتي:

$$Min.Z = 3X_1 - 2X_2 - X_3$$

Sub. to:

$$3X_1 + 5X_2 + 4X_3 \geq 7$$

$$6X_1 + X_2 + 3X_3 \geq 4$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

الحل:

$$Max.W = 7Y_1 + 4Y_2$$

Sub. to:

$$3Y_1 + 6Y_2 \leq 3$$

$$5Y_1 + Y_2 \leq -2$$

$$4Y_1 + 3Y_2 \leq -1$$

$$Y_1, Y_2 \geq 0$$

مثال (5.2)

اوجد النموذج المقابل لنموذج البرمجة الخطية الاتي:

$$Max.Z = X_1 + 2X_2 - 5X_3$$

Sub. to:

$$2X_1 + 2X_2 - 3X_3 \leq 10$$

$$X_1 + 6X_2 \leq 15$$

$$2X_2 - 4X_3 \leq 20$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

الحل:

$$Min.W = 10Y_1 + 15Y_2 + 20Y_3$$

Sub. to:

$$2Y_1 + Y_2 \geq 1$$

$$2Y_1 + 6Y_2 + 2Y_3 \geq 2$$

$$-3Y_1 - 4Y_3 \geq -5$$

$$Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0$$

مثال (6.2)

لدى توفر لديك نموذج البرمجة الخطية التالي، اوجد ما يأتي:

1. اوجد النموذج المقابل لنموذج البرمجة الخطية.
2. اوجد الحل الامثل للنموذج المقابل باستخدام (Simplex Method).
3. اوجد الحل الامثل للنموذج الاولي.

$$Min.Z = 2X_1 + X_2$$

Sub. to:

$$X_1 + 3X_2 \geq 30$$

$$4X_1 + 2X_2 \geq 40$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

الحل:

1. النموذج المقابل

$$Max.W = 30Y_1 + 40Y_2$$

Sub. to:

$$Y_1 + 4Y_2 \leq 2$$

$$3Y_1 + 2Y_2 \leq 1$$

$$Y_1, Y_2 \geq 0$$

2. الحل الامثل للنموذج المقابل

الصيغة القياسية

$$Max.W - 30Y_1 - 40Y_2 = 0$$

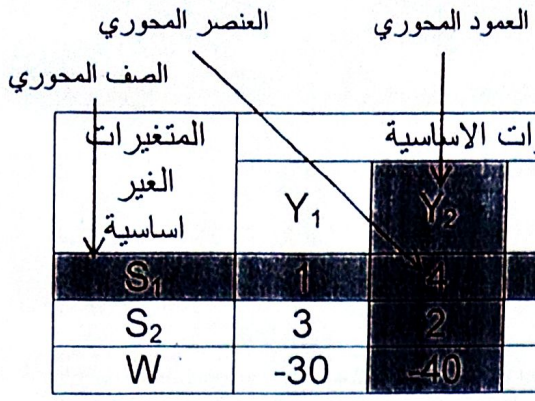
Sub. to:

$$Y_1 + 4Y_2 + S_1 = 2$$

$$3Y_1 + 2Y_2 + S_2 = 1$$

$$Y_1, Y_2, S_1, S_2 \geq 0$$

الجدول الاول (الحل الاساسي الممكن)



المتغيرات الغير اساسية	المتغيرات الاساسية				Sol.	Ratio.
	Y_1	Y_2	S_1	S_2		
S_1	1	4	1	0	2	1/2
S_2	3	2	0	1	1	1/2
W	-30	-40	0	0	0	

حساب الصفوف الجديدة للجدول الثاني

حساب قيم المتغير الداخل Y_2

Y_2 (1/4 1 1/4 0 1/2)

حساب قيم الصف الجديد S_2

S_2old (3 2 0 1 1)

2 * (1/4 1 1/4 0 1/2) (بالطرح)

S_2old (3 2 0 1 1)

(1/2 2 1/2 0 1) (بالطرح)

S_2new (5/2 0 -1/2 1 0)

حساب قيم الصف الجديد W

Wold (-30 -40 0 0 0)

- 40*(1/4 1 1/4 0 1/2) (بالطرح)

Wold (-30 -40 0 0 0)

(-10 -40 -10 0 -20) (بالطرح)

Wnew (-20 0 10 0 20)