جامعة المستقبل
كلية التقنيات الطبية والصحية
قسم تقنيات الاشعة

السنة / الرابعة
العام الدراسي/2023-2024

الإحصاء الحياتي
محاضرة (19)

اختبارات المتوسطات :

سنتناول في هذا الموضوع الاختبارات التي تتعلق بمتوسطات العينات عند معرفتنا لتوزيعاتها وسوف نتطرق لحالتين عندما يكون تباين المجتمع معلوما او غير معلوم وحول وسط حسابي واحد وحول وسطين حسابيين.

أولا: اختبارات العينة الواحدة

1. اختبارات الوسط الحسابي عندما يكون تباين المجتمع σ^2 معلوما
لتكن $X_1, X_2, X_3, \ldots\ldots\ldots, X_n$ تمثل قياسات مفردات عينه عشوائية تم اختبارها من مجتمع ذي توزيع طبيعي بوسط حسابي قدره μ وتباين σ^2 وليكن $\overline{X}$ و S^2 يمثلان الوسط الحسابي والتباين لقياسات هذه العينة.
وعلى فرض اننا نرغب في اخبار الفرضية

$H0 : \mu = \mu 0$

حيث μ0 تمثل قيمه معطاة ضد أي فرضية اخرى

فيكون معيار الاختبار

$$Z=\frac{\overline{X}-\mu 0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

2. اختبارات الوسط الحسابي عندما يكون تباين σ^2 غير معلوم
أ: عندما يكون حجم العينة كبير $[n \geq \mathbf{30}]$
فيكون المعيار الملائم للاختبار هو:

$$Z=\frac{\overline{X}-\mu 0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

حيث تم الاستعاضة عن(σ) بقيمة الانحراف المعياري للعينة (S) وكذلك اذا كان حجم العينة كبير ، حيث يكون(S^2) تقدير جيد لتباين المجتمع.

إجراءات الاختبار:

1. صياغة فرضية الاختبار
2. حساب إحصاءه الاختبار
3. مقارنة الاحصاءة المحسوبة مع الجدولية لاتخاذ القرار

قاعدة القرار

اذا وقعت قيمه (Z) المحسوبة في منطقة الرفض فإننا نرفض الفرضية الصفرية (العدم) والعكس بالعكس، ويمكن تحديد منطقة الرفض اعتمادا على صيغ الفرضية البديلة كالاتي:

1. $|Z| > Z_{\alpha/2}$
2. $Z > Z\alpha$
3. $Z < - Z\alpha$

ولتسهيل عملية استخراج القيم الجدولية (النظرية) ، فالجدول اناه يوضح بعض القيم الحرجة ل (Z) والتي غالبا ما تستخدم لكل من الاختبارات من طرف واحد او من الطرفين ولمستويات مختلفة من المعنوية

مستوى المعنوية α / نوع الاختبار	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.002	0.001
طرف واحد	**±1.28**	**±1.645**	**±1.96**	**±2.33**	**±2,58**	**±2.88**	**±3.09**
طرفين	**±1.645**	**±1.96**	**±2.24**	**±2.58**	**±2.81**	**±3.09**	**±3.29**

ب. عندما يكون حجم العينة صغير (أي اقل من 30 مفردة) n<30

فان معيار الاختبار الملائم هنا هو :

$$Z=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n-1}} \sim t(n-1)$$

حيث تتم مقارنة القيمة المستخرجة لمعيار الاختبار مع قيمة معيار الاختبار (t) الجدولية بدرجة حرية

(n-1) ومستوى معنوي محدد ، ويكون القرار عندما تكون t المحسوبة في منطقة الرفض فإننا نرفض H_0 والعكس بالعكس وكالاتي:

1. $|t| > t_{\alpha/2}$
2. $t > t\alpha$
3. $t < -t_{\alpha}$

مثال:

ادعت احدى الشركات المنتجة لمادة كيمياوية معينة بان متوسط كثافة هذه المادة يزيد على 5 من الوحدات (μ >5)علما بان التباين مقداره (σ^2=4) ولغرض اجراء الاختبار لهذا المتوسط قام الباحث بسحب عينة من مجتمع المواد المنتجة (غير المحدد والمعبأ في قناني خاصة) بحجم خمسين مادة(n=50) وكان متوسطها ($\overline{X}$=5.4) فهل يمكن القبول بادعاء الشركة لمستوى معنوية 5%

الحل/

1. فرضية الاختبار

$$H_0: \mu = 5$$
$$H_1: \mu > 5$$

2. حساب إحصاءه الاختبار

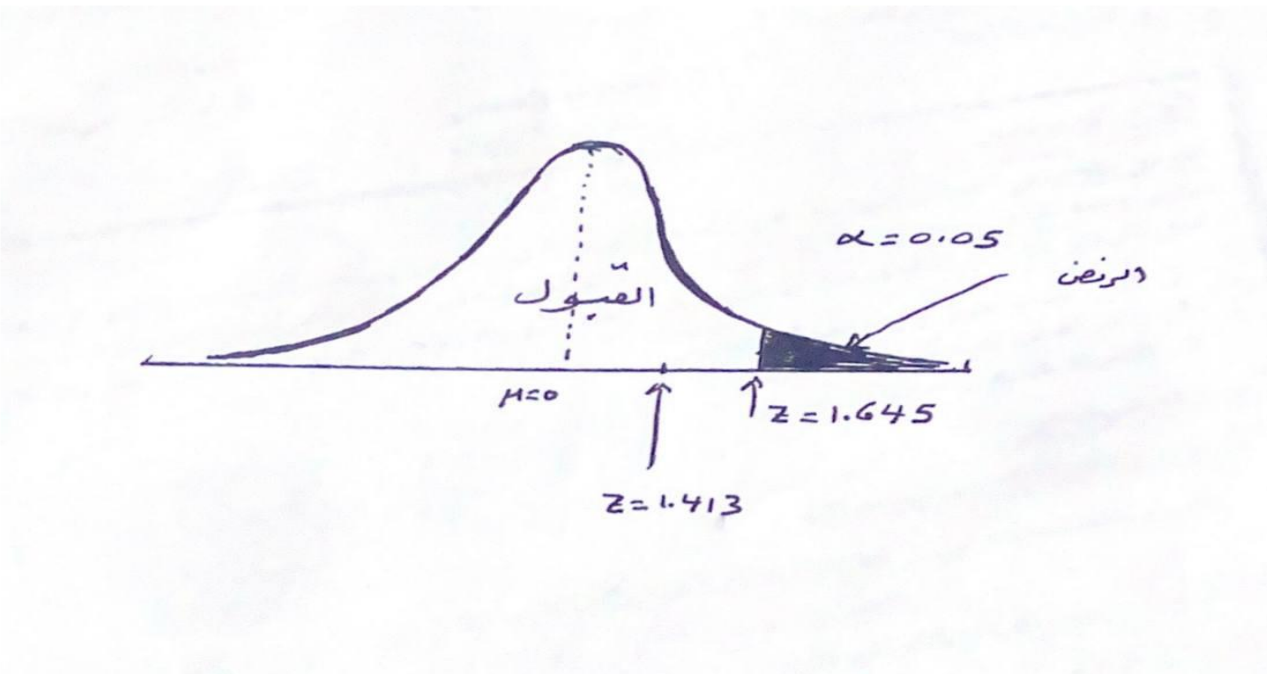
ان المعلومات المتوفرة لدينا التباين للمجتمع معلوم $\overline{X}$=5.4 و n=50

اذن احصاءه الاختبار هي :

$$Z=\frac{\overline{X}-\mu 0}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{5.4-5}{2/\sqrt{50}}=1.413$$

3. استخراج قيمة Z عند مستوى 5% نجد انها تساوي (Z= 1.645)
4. القرار بما ان Z المحسوبة وقعت في منطقة القبول لذا نقبل فريضة العدم والقائلة بان متوسط كثافة المادة المنتجة يساوي 5 وعليه يعتبر أداء الشركة غير مقبول.

(بمعنى اخر اذا كانت القيمة المحسوبة اقل من الجدولية لذلك نقبل فريضة العدم)



مثال : أجريت دراسة من قبل احد الباحثين حول متوسط اعمار المصابين بمرض تصلب الشرايين من خلال عينة بحجم 25، سحبت من مجتمع غير محدود وسط الحسابي يسوي (Ϻ=60) وتباينه غير معلوم وتم حساب متوسط الاعمار للعينة وكان يساوي ($\overline{X}$=55) وانحرافه القياسي (المعياري) يساوي وارد ا(S=8) واراد الباحث اختبار متوسط العينة فيما اذا كان يختلف عن متوسط المجتمع بمستوى معنوية (0.05)

الحل:

1. فرضية الاختبار

$H_0: \overline{X}=60$

$H_1: \overline{X} \neq 60$

2. احصاءه الاختبار وحسب المعلومات المتوفرة لدينا هي:

α =0.05 ; n = 25 ; $\overline{X}=\mathbf{55}$; µ = 60 ; S = 8

التباين مجهول والعينة الصغيرة نستخدم اختبار t .

$$t = \frac{\overline{X} - \mu 0}{S/\sqrt{n-1}} = \frac{5.4 - 60}{8/\sqrt{25-1}} = -3.062$$

3. نجد القيمة الجدولية للاحصاءة t من الجدول عند مستوى معنويه 5%

$[\boldsymbol{\alpha/2 = 0.05/2 = 0.025}]$ ودرجة حرية d.f =n-1=24 فنجد انها تساوي (t=2.064)

4. نأخذ القيمة المطلقة للاحصاءة المحسوبة فنجد انها تساوي 3.064

وبذلك فان $|\boldsymbol{t}| > \boldsymbol{t_{\alpha/2}}$

فيكون القرار بما ان القيمة المحسوبة ل t هي اكبر من القيمة الجدولية لذ نرفض فرضية العدم ونقبل الفرضية البديلة ، أي ان متوسط العينة يختلف عن متوسط المجتمع

مثال:

في دراسة إحصائية لمعرفة متوسطات المبيعات لمذاخر الادوية في محافظة بابل ، تم اختيار (10) مذاخر بشكل عشوائي حيث كانت مبيعاتها بملايين الدنانير وكالاتي :

163, 165, 168, 196, 170, 173, 134, 176, 179, 163

فاذا كان الانحراف المعياري للمبيعات هو (5) مليون دينار.

المطلوب : اختبر الفرضية القائله بان متوسط المبيعات اليومي (169) مليون دينار بمستوى معنويه قدره (0.05) .

الحل:

من المعطيات أعلاه نجد ان الانحراف المعياري معلوم σ=5

$H_{0:}\ \mu = 169$

$H_{1:}\ \mu \neq \mathbf{169}$

$$\overline{X} = \frac{\Sigma X_i}{n} = \frac{136+165+\ldots\ldots+163}{10} = 166$$

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu 0}{\alpha/\sqrt{n}} = \frac{166 - 169}{5/\sqrt{10}} = -1.897$$

فان القيمة المطلقة ل Z المحسوبة ونقارنها مع الجدولية .

$$\mathbf{Z_{\alpha/2} = Z_{0.05/2} = Z_{0.025} = 1.96}$$

القرار:

نجد ان القيمة المحسوبة اصغر من القيمة الجدولية عند مستوى معنويه 5% لذا نقبل فرضية العدم أي ان متوسط المبيعات اليومي للمجتمع يساوي 169 الف دينار.