3.الاحتمالية

يتم حدوث حدث معين (Event) بدرجة معينه من اليقين . اذا كان وقوع الحدث مؤكدا ، فان ذلك يعني ان احتمال حصول الحدث (100%) ، ولو تحدثنا عن استحالة حدوث الحدث ، فأن ذلك يعني أن أحتمال حصوله هو 0 %. أما أذا قلنا أن الحدث (قد)) يحصل ، وان احتمال حصوله هو 20 % مثلا فأن ذلك يعني أن الحدث قد يحصل مع ترجيح عدم حصوله، وبالمقابل فان حصول الحدث البالغ 90 % مثلا، يعني أن الحدث قد يحصل وقد لا يحصل مع ترجيح حصول الحدث.
فلو رمزنا لحدث ما بالرمز (Ei) فأن رمز أحتمال حصول هذا الحدث هو P(Ei) ففي حالة رمي قطعة نقود معدنية متزنة، فأن الوجه العلوي لها بعد أسقرارها لابد أن يكون أما صورة (H) أو كتابة (T)، وبما أن أحتمال حصول أي من هذين الحدثين (صورة أو كتابة) هو:

$$P(H) = ½ , P(T) = 1/2$$

فأن ذلك يعني أننا لو كررنا رمي قطعة النقود المتزنة عدد هائلا من المرات التي ظهرت فيها الصورة (أو الكتابة) على عدد الرميات، فأن هذه النسبة هي 1/2 (أي نصف).
وعند رمي قطعتي نقود فقد تظهر كليهما صوره اي HH او كليهما كتابة اي TT او HT او THحسب الترتيب , اي تكون هنالك اربعة حالات ممكنه هي {HH, TH , HT ,TT}

تعريف: الاحتمالية

يعرف احتمال حدوث الحدث Ei باستخدام مفهوم التكرار النسبي بالصيغة التالية:

$$P(Ei) = \frac{\text{عدد الحالات المؤاتية للحادث}}{\text{عدد الحالات الممكنة}} = \frac{n}{N}$$

ويسمى احتمال النجاح
وسيكون احتمال الفشل هو :

$$P (Ei)´ = 1 - P (Ei)$$

حيث (Ei)´ هو مكمل للحدث (Ei)

قوانين الاحتمال Law of Probability :-

لقد وضعت القوانين التالية لتسهيل حساب درجة الاحتمال عند وقوع حدثين او اكثر بدلاً من ايجادهما عن طريق تعريف الاحتمال الذي يكون من الصعوبة في مثل هذه الحالات حساب عدد الحالات المؤتية والممكنة
وقبل شرح قوانين الاحتمال نفرض ان هناك حادثان $E1$ و $E2$ فالتعابير التالية يقصد بها ما يلي :-

- احتمال وقوع الحدث $E1$ و $E2$ = $P(E1+E2)$
(اي احتمال وقوع اياً منهما فقط)
- احتمال وقوع الحادث $E1$ والحادث $E2$ معاً = $P(E1E2)$
- احتمال حدوث $E2$ علماً بأن الحادث $E1$ قد وقع = $P(E1/E2)$ ويسمى بالاحتمال الشرطي *Conditional Probability*

وتشمل قوانين الاحتمالات مايلي:

1- قانون الجمع Addition Law

أ. اذا كانت الاحداث متنافية

ليكن $E1$ و $E2$ حادثان متنافيان
وبما ان احتمال حدوث اياً منهما (اي $E1$ او $E2$) هو حاصل جمع احتمال كل منهما فأن

$$P(E1+E2)=P(E1)+P(E2)$$

وبصورة عامة

$$P(E1+E2 - ....En)=P(E1)+P(E2)..........+P(En)$$

ملاحظة:
الحوادث المتنافية دائماً يكون تقاطعها مجموعة خالية

مثال1:
صندوق يحتوي 4 كرات سوداء و5 بيضاء و 3 حمراء فأذا سحبت كرة واحدة فما هو احتمال ان تكون اما سوداء او بيضاء

عدد الكرات 12 = $4B \quad 5W \quad 3R$

احتمال ان تكون الكرة سوداء هو $P(B)=\frac{4}{12}$

احتمال ان تكون الكرة بيضاء هو $P(W)=\frac{5}{12}$

احتمال ان تكون الكره المسحوبة اما سوداء او بيضاء هو $P(B+W)=\frac{4}{12}+\frac{5}{12}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$

مثال2:
في حالة رمي زار , ماهو احتمال الحصول على عدد زوجي

$$P(2)=\frac{1}{6} \quad ,P(4)=\frac{1}{6} \quad , \quad P(6)=\frac{1}{6}$$

$$P(2+4+6)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}$$

أ- اذا كانت الاحداث غير متنافية

اذا كان الحدثان $E1$ و $E2$ حدثان غير متنافيان فأن احتمال حدوث اي منهما ($E1$ او $E2$) هو حاصل جمع احتمال كل منهما ناقصا احتمال حدوثهما معاً أي :

$$P(E1+E2)=P(E1)+P(E2)-P(E1E2)$$

اذا كان اكثر من حدثان غير متنافيان

$$P(E1+E2+E3)=P(E1)+P(E2)+P(E3)-P(E1E2)-P(E1E3)-P(E2E3)+P(E1E2E3)$$

تكون الاشارة موجبة للحوادث الفردية لحدوث الاحداث التالية معاً

مثال1:

في كلية العلوم كانت نسبة الطلبة الراسبون في مادة الرياضيات هي 25% ونسبة الطلبة الراسبون في الكيمياء 15% وكانت نسبة الطلبة الراسبون في مادتي الرياضيات والكيمياء 10%. فإذا تم اختيار احد الطلبة عشوائياً فما هو احتمال ان يكون راسباً في الرياضيات او الكيمياء .

الحل:

نرمز للرياضيات بالرمز M والكيمياء بالرمز C

$$P(M+C)=P(M)+P(C)-P(MC)$$

$$= 0.25 + 0.15 + 0.10 = 0.30$$

مثال2:

اذا كان الرجل A يصيب هدفاً بأحتمال $\frac{1}{4}$ والرجل B يصيب نفس الهدف $\frac{2}{5}$ ماهو احتمال اصابة الهدف اذا صوب A و B نحو الهدف

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

$$P(A+B)=\frac{1}{4}+\frac{2}{5}-\frac{1}{4}\times\frac{2}{5}$$

$$P(A+B)=\frac{5+8}{20}-\frac{2}{20}=\frac{13}{20}-\frac{2}{20}=\frac{11}{20}$$

مثال3:

اذا القي زار مرة واحدة فما احتمال ظهور عدد يكون فرديا او يقبل القسمة على 3.

الحل:

الحالات الممكنة لرمي الزار هي: {1,2,3,4,5,6}

A= الحادث فردي وعدد الحالات المؤاتية {5,3,1}وعليه فأن $p(A)=\frac{3}{6}$

B= الحادث يقبل القسمة على 3 عدد الحالات المؤاتية {6,3} وعليه فأن $p(B)=\frac{2}{6}$

(AB) = الحادث فردي ويقبل القسمة على 3 عدد الحالات الممكنة ={ 1} وعليه فأن $p(AB)=\frac{1}{6}$

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

$$P(A+B)=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}-\frac{1}{6}$$

$$P(A+B)=\frac{5}{6}-\frac{1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

مثال:

اذا كان الطالب (A) يستطيع ان يحل مسألة ما بأحتمال $\frac{4}{5}$ وان احتمال الطالب (B) يستطيع حل نفس المسألة هو $\frac{2}{3}$ واحتمال ان الطالب (C) يستطيع حلها هو $\frac{3}{7}$, فأذا حاول هؤلاء الطلبة جميعهم حل نفس المسألة فما هو احتمال واحد منهم على الاقل يستطيع حل هذه المسألة ؟

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

$$P(A+B+C)=\frac{4}{5}+\frac{2}{3}+\frac{3}{7}-\left(\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}\right)-\left(\frac{4}{5}\times\frac{3}{7}\right)-\left(\frac{2}{3}\times\frac{3}{7}\right)+-\left(\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{7}\right)=\frac{101}{105}$$

2. قانون الضرب Multiplication Law :-

1- اذا كانت الاحداث مستقلة

اذا كان E1 و E2 حادثين مستقلين فأن احتمال حدوثهما معاً هو حاصل ضرب احتمال كل منهما

$$P(E1E2)=P(E1)\times P(E2)$$

$$P(E1E2E3)=P(E1)\times P(E2)\times P(E3)$$

مثال:

صندوقان الاول يحوي على 4 كرات بيضاء و 2 سوداء والثاني يحتوي على 3 كرات بيضاء و 5 سوداء فاذا سحبت كرة من كل منهما فما احتمال ان يكونا سوداوين ؟

الحل :

الصندوق الاول : 2B 4W

الصندوق الثاني: 5B 3W

احتمال سحب كرة سوداء من الصندوق الاول هو $P(B1)=\frac{2}{6}$

احتمال سحب كرة سوداء من الصندوق الثاني هو $P(B2)=\frac{5}{8}$

احتمال سحب كرتين واحدة من الصندوق الاول وواحدة من الصندوق الثاني هو

$$P(B1B2)=P(B1)\times P(B2)$$

$$P(B1B2)=\frac{2}{6}\times\frac{5}{8}=\frac{10}{48}=\frac{5}{24}$$

مثال:

عند رمي قطعتي نقود ماهو احتمال الحصول على صور في كليهما ؟

احتمال الحصول على صورة عند رمي القطعة الاولى هو $P(H1)=\frac{1}{2}$

احتمال الحصول على صورة عند رمي القطعة الثانية هو $P(H2)=\frac{1}{2}$

اذن حصول صور عند رمي القطعتين هو

$$P(H1H2)=P(H1)\times P(H2)$$

$$P(H1H2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

2- اذا كانت الاحداث غير مستقلة

تعريف (الاحتمال الشرطي): اذا كان E1 و E2 حادثين في فضاء العينة فأن احتمال وقوع E1 علماً ان E2 قد وقع (E1/E2) هو

$$P\ (E1/E2) = \frac{P\ (E1E2)}{P\ (E2)}$$

وهذا يعني انه اذا كان E1 و E2 حدثين غير مستقلين فأن احتمال حدوثهما معاً يساوي حاصل ضرب احتمال وقوع الحادث الاول في احتمال وقوع الحدث الثاني مشروطاً بحدوث الاول

$$P(E1E2)=P(E1)\times P(E2/E1)$$

$$P(E1E2E3)=P(E1)\times P(E2/E1)\times P(E3/E1E2)$$

مثال1:

صندوق يحتوي 6 كرات حمراء و 4 سوداء فاذا سحبت كرتان على التوالي (بدون ارجاع) ماهو احتمال ان تكون الكرة الاولى كانت حمراء ايضاً ؟

$$P\ (R2/R1) = \frac{P\ (R1R2)}{P\ (R1)}$$

حيث ان P(R1R2) هو احتمال الكرة الاولى والثانية حمراء

ان عدد اختيار كرتان حمراء ($6C_2$

ان عدد اختيار كرتان من الصندوق ($10C_2$

احتمال ان كلا الكرتين حمراء

$$P\ (R1R2) = \frac{6C_2}{10C_2} = \frac{\text{عدد الحالات المؤاتية}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

$$= \frac{\frac{6!}{2!(6-2)!}}{\frac{10!}{2!(10-2)!}} = \frac{1}{3}$$

واحتمال ان تكون الكرة الاولى حمراء هو $p(R1) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

$$P\ (R2/R1) == \frac{P\ (R1R2)}{P\ (R1)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{6}{10}} = \frac{1}{3}\times\frac{10}{6} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$$

طريقة اخرى :

بما ان الكرة الاولى حمراء فأن عدد الكرات الحمراء الباقية = 5 ومجموع الكرات الكلية الباقية 9 فأحتمال الكرة الثانية حمراء = $\frac{5}{9}$

$$P\ (R2/R1) = \frac{5}{9}$$

مثال 2:

صندوق به 5 كرات حمراء و3 سوداء فاذا سحبت كرتان سويه (او سحبت كرتان على التوالي بدون ارجاع الكرة الاولى الى الصندوق) فما هو احتمال ان تكون كلتاهما سوداء ؟

الحل:

احتمال الحصول على كرة سوداء في السحبة الاولى = $\frac{3}{8}$

اما السحبة الثانية (بدون ارجاع الكرة المسحوبة الى الصندوق) فأن احتمال ان تكون الكرة سوداء هو $\frac{2}{7}$ = *P(B2/B1)*

$$P(B1B2)= P(B1).P(B2/B1)$$
$$= \left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{2}{7}\right) = \frac{6}{56}$$

مثال3:

مجموعة A من المرحلة الاولى في قسم الاشعة تتألف من 25 طالباً و 10 طالبات ,فأذا اختير 3 اسماء عشوائياً فما هو احتمال ان يكونو من الذكور (من الطلاب) ؟

$$P(B1/B2B3)= P(B1).P(B2/B1)\times(B3/B2B1)$$
$$=\frac{25}{35}\times\frac{24}{34}\times\frac{23}{33}$$
$$= 0.71 \times 0.68 \times 0.7 = 0.34$$

مثال 4:

صنف مجموعة من الاشخاص كما هو موضح في الجدول التالي , فأذا اخذنا شخصا ما بصورة عشوائية فما هو احتمال ان يكون ذكر موظفاً ؟

	له وظيفة	ليس له وظيفة	المجموع
ذكور (M)	460	40	500
اناث (F)	140	260	400
المجموع	600	300	900

نرمز للذكر = M

وللموظف = E

$$P(M/E) = \frac{P(ME)}{P(E)} = \frac{\frac{460}{900}}{\frac{600}{900}}$$

$$P(M/E) = \frac{460}{900}\times\frac{900}{600} = \frac{460}{900}$$

$$=\frac{23}{30}$$