اسم المادة : تحليلات هندسيه وعدديه

اسم التدريسي : أ. م. د محمد علي صيهود

المرحلة : الثالثه

السنة الدراسية : 2024-2023

عنوان المحاضرة: Finite Differences Method

Finite Differences Method for

Solution of Differential Equation

أن طريقة الفروقات المحددة (Finite Differences Method) الاكثر لاستخداما وشيوعا وبشكل تفصيلي لحل صيغ مختلفة للمعادلات مثل معادلات الهياكل الانشائية ومعادلات عمليات انتقال الحرارة وغيرها من المعادلات وذلك باللجوء الى ترجمة كل معادلة تفاضليه الى معادله جبرية قابلة للتطبيق على جزء محدد من المجال المتضمن حل المعادلة التفاضلية خلاله.

المعادلات التفاضلية الاعتيادية: (The Ordinary Differential Equation)**:**

الفروق المركزية التقريبه لتمثيل المشتقات الاربعة الاولى كما يلي:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2h}\left(y_{i+1}-y_{i-1}\right)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{h^2}\left(y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}\right)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{1}{2h^3}\left(y_{i+2}-2y_{i+1}+2y_{i-1}-y_{i-2}\right)$$

$$\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{1}{h^4}\left(y_{i+2}-4y_{i+1}+6y_i-4y_{i-1}+y_{i-2}\right)$$

E-mail: mohammed.ali.saihood@uomus.edu.iq

عنوان المحاضرة: Finite Differences Method

Ex(1): Solve the following differential equation:

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$$

Subject to conditions y(1)=1, y(2)=2

Solution:

المشتقة ($\frac{d^2y}{dx^2}$) عند منتصف الفترة (Interval) تعرف هكذا:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{h^2}\left(y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}\right)$$

حيث ان h هو طول الخطوه, نجعل (n=4)

حيث ان قيمه h=1/4. تعوض في المعادلة اعلاه

$$x_i\left(16\left(y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}\right)\right)+y_i=0$$
$$16x_i\,y_{i+1}+\left(1-32x_i\right)y_i+16x_i\,y_{i-1}=0$$

وبعد التعويض ب (i=1 , 2 ,3) على التوالي في المعادلة اعلاه وبعد التبسيط نحصل على:

For i=1

$$16x_1\,y_2+\left(1-32x_1\right)y_1+16x_1\,y_0=0$$

$$x_1=1\frac{1}{4}=\frac{5}{4}\text{ , and }\ y_0=1$$

$$16\frac{5}{4}y_2+\left(1-32\frac{5}{4}\right)y_1+16\frac{5}{4}*1=0$$

$$20y_2-39y_1+20=0$$
$$39y_1-20y_2+0y_3=20 \qquad \text{.....(1)}$$

E-mail: mohammed.ali.saihood@uomus.edu.iq

For i=2

$$16x_2\,y_3+(1-32x_2)\,y_2+16x_2\,y_1=0$$

$$x_1=1\frac{2}{4}=\frac{6}{4}$$

$$16\frac{6}{4}y_3+\left(1-32\frac{6}{4}\right)y_2+16\frac{6}{4}y_1=0$$

$$24y_1-47\,y_2+24y_3=0 \qquad \text{.....(2)}$$

For i=3

$$16x_3\,y_4+(1-32x_3)\,y_3+16x_3\,y_2=0$$

$$x_1=1\frac{3}{4}=\frac{7}{4}$$

$$16\frac{7}{4}y_4+\left(1-32\frac{7}{4}\right)y_3+16\frac{7}{4}y_2=0$$

$$0y_1+28\,y_2-55y_3=-56 \qquad \text{.....(3)}$$

وباستخدام طريقة كاوس للحذف نحصل على:

$$y_1=1.35126$$
$$y_2=1.63495$$
$$y_3=1.85053$$

E-mail: mohammed.ali.saihood@uomus.edu.iq

Ex (2): Given the boundary- value problem

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4(y-x) \quad ,0 \le x \le 1, \quad y(0)=0,\ and\ \ y(1)=2$$

Use **the finite difference method to approximate the solution with h=1/4.**

Solution:

المشتقة ($\frac{d^2y}{dx^2}$) عند منتصف الفترة (Interval) تعرف هكذا:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{h^2}(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1})$$

حيث ان h هو طول الخطوه, نجعل (n=4)

حيث ان قيمه h=1/4. تعوض في المعادلة اعلاه

$$16(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) = 4(y_i - x_i)$$
$$(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) = 0.25(y_i - x_i)$$
$$(y_{i+1} - 2y_i - 0.25y_i + y_{i-1}) = -0.25x_i$$
$$(y_{i+1} - 2.25y_i + y_{i-1}) = -0.25x_i$$

وبعد التعويض ب (i=1 , 2 ,3) على التوالي في المعادلة اعلاه وبعد التبسيط نحصل على:

For i=1

$$(y_2 - 2.25y_1 + y_0) = -0.25x_1$$

$$x_1 = 1\frac{1}{4} = \frac{5}{4} \text{ , and } \ y_0 = 0$$

$$(y_2 - 2.25y_1 + 0) = -0.25\frac{5}{4}$$

E-mail: mohammed.ali.saihood@uomus.edu.iq

$$2.25y_1 + y_2 + 0y_3 = 0.0625 \qquad \text{.....(1)}$$

For i=2

$$(y_3 - 2.25y_2 + y_1) = -0.25x_2$$

$$x_1 = 1\frac{2}{4} = \frac{6}{4}$$

$$(y_3 - 2.25y_2 + y_1) = -0.25\frac{6}{4}$$

$$y_1 - 2.25\,y_2 + y_3 = -0.125 \qquad \text{.....(2)}$$

For i=3

$$(y_4 - 2.25y_3 + y_2) = -0.25x_3$$

$$x_1 = 1\frac{3}{4} = \frac{7}{4}$$

$$(y_4 - 2.25y_3 + y_2) = -0.25\frac{7}{4}$$

$$y_4 - 2.25y_3 + y_2 = -0.1875$$

وباستخدام طريقة كاوس للحذف نحصل على:

$$y_1 = 0.3951$$
$$y_2 = 0.8265$$
$$y_3 = 1.3396$$

E-mail: mohammed.ali.saihood@uomus.edu.iq