3. Numerical Solution of Ordinary Differential Equation

المقصود بحل أي معادلة تفاضلية هو إيجاد دالة خالية من المشتقات وبإمكانها تحقيق المعادلة التفاضلية وتحقيق بعض الشروط الابتدائية والحدودية. المعادلات التفاضلية التي سوف يتم التطرق لها هي معادلات تفاضلية من

الرتبة الأولى والتي سوف تكون بالشكل التالي: $\frac{d}{dx} = f(x, y)$.

هنالك عدة طرق لحل المعادلات التفاضلية منها:

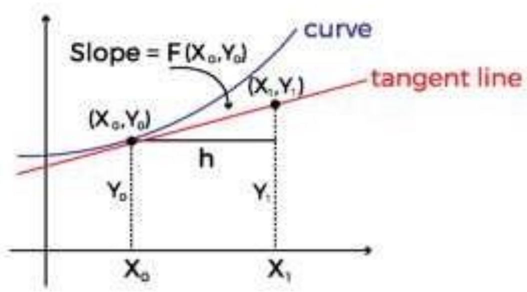
3.1 Euler's Method

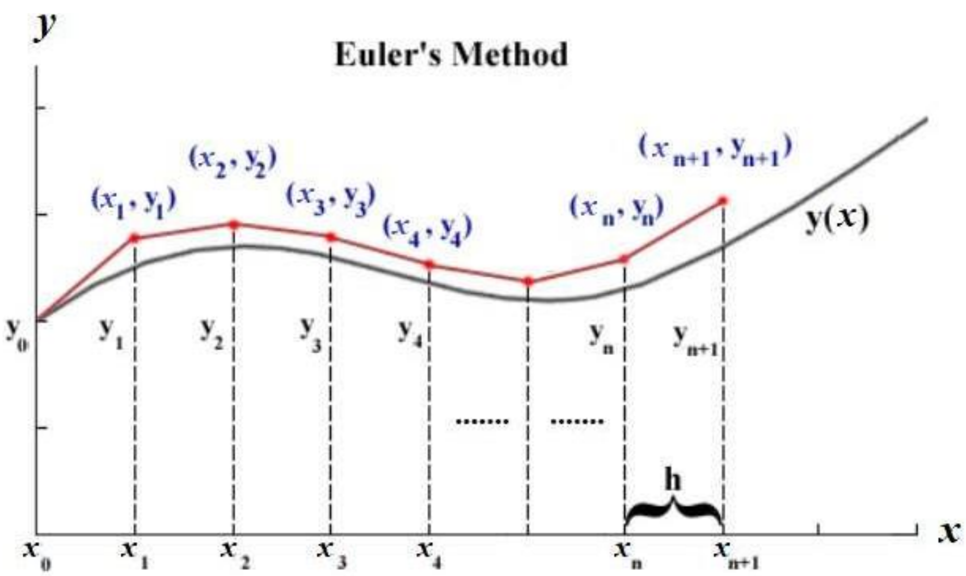
تعتبر هذه الطريقة من ابسط الطرق لحل المعادلات التفاضلية، وبشكل عام تعتبر هذه الطريقة غير دقيقة في إيجاد الحلول العددية للمعادلات التفاضلية الاعتيادية.

$$Slop = \grave{y}_o = \frac{y_1 - y_o}{h} \quad \rightarrow$$

$$y_1 = y_o + h\, \grave{y}_o \quad \rightarrow$$

$$\boldsymbol{y_{i+1} = y_i + h\, \grave{y}_i}$$





E-mail: mohammed.ali.saihood@uomus.edu.iq

ملاحظة: المتطلبات الواجب توفرها عند الحل:

1. الدالة $\acute{y} = \frac{d}{dx}$
2. القيمة الابتدائية لـ x_0 و y
3. قيمة h

Example (1): Find the solution of differential equation by using Euler's Method at $x = 0.25$, $\frac{dy}{dx} = x^2 + 4x - \frac{1}{2}y$, if it's known that $x_o = 0, y_o = 4$, $h = 0.05$.

Solve:

i	x_i	y_i (Num.)	y_i (Ana.)
0	0	4	4
1	0.05	3.9	3.91
2	0.10	3.81	3.82
3	0.15	3.73	3.76
4	0.20	3.67	3.70
5	0.25	3.62	3.65

$$y_{i+1} = y_i + h\,\acute{y}_i$$

$$y_{i+1} = y_i + 0.05\ \left(x_i^{\,2} + 4x_i - \frac{1}{2}y_i\right)$$

$$x_o = 0,\ \ y_o = 4$$

$$y_1 = 4 + 0.05\ \left((0)^2 + 4(0) - \frac{1}{2}(4)\right) = 3.9$$

$$x_1 = 0.05,\ \ y_1 = 3.9$$

$$y_2 = 3.9 + 0.05\ \left((0.05)^2 + 4(0.05) - \frac{1}{2}(3.9)\right) = 3.81$$

$$x_2 = 0.10,\ \ y_2 = 3.81$$

$$y_3 = 3.81 + 0.05\ \left((0.1)^2 + 4(0.1) - \frac{1}{2}(3.81)\right) = 3.73 \ldots\ldots continous$$

E-mail: mohammed.ali.saihood@uomus.edu.iq

H.W: use Euler's Method, solve the following differential equation at $x = 2$

$$\grave{y} = 2 + \sqrt{xy}, \quad \text{use } x_o = 1, y_o = 1, \quad h = 0.2.$$

H.W: Solve the following differential equation by using Euler's Method, at $x = 2$, $\grave{y} = x + \sin x + y$, use $x_o = 0$, $y_o = 0.5$, $h = 0.5$.

3.2 Taylor Series Method

هذه الطريقة أكثر تعقيدا من الطريقة السابقة ولكن نسبة الخطأ فيها قليلة)أكثر دقة(. القانون العام لهذه الطريقة هو:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{\grave{y}(x_i, y_i)}{1!} h + \frac{\grave{\grave{y}}(x_i, y_i)}{2!} h^2 + \frac{\grave{\grave{\grave{y}}}(x_i, y_i)}{3!} h^3 + \dots\dots\dots + \frac{y^n(x_i, y_i)}{n!} h^n$$

if $i = 0$ then;

$$y_1 = y_o + \frac{\grave{y}(x_o, y_o)}{1!} h + \frac{\grave{\grave{y}}(x_o, y_o)}{2!} h^2 + \frac{\grave{\grave{\grave{y}}}(x_o, y_o)}{3!} h^3 + \dots\dots\dots + \frac{y^n(x_o, y_o)}{n!} h^n$$

ملاحظة: لتبسيط الحل سوف نعتمد 4 حدود فقط من المعادلة في حل الأمثلة وفي الامتحان.

Example (2): Find the solution of differential equation by using Taylor Method at $x = 0.1$, $\grave{y} = x + y$, if it's known that $x_o = 0$, $y_o = 1$, $h = 0.05$.

Solve:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{\grave{y}(x_i, y_i)}{1!} h + \frac{\grave{\grave{y}}(x_i, y_i)}{2!} h^2 + \frac{\grave{\grave{\grave{y}}}(x_i, y_i)}{3!} h^3$$

$$i = 0: \ (x_o, y_o) \quad \rightarrow \quad (0,1)$$

$$y_1 = y_o + \frac{\grave{y}(x_o, y_o)}{1!} h + \frac{\grave{\grave{y}}(x_o, y_o)}{2!} h^2 + \frac{\grave{\grave{\grave{y}}}(x_o, y_o)}{3!} h^3$$

E-mail: mohammed.ali.saihood@uomus.edu.iq

$y_o = 1$

$y'(x_o, y_o) = x + y = 0 + 1 = 1$

$y''(x_o, y_o) = 1 + y' = 1 + 1 = 2$

$y'''(x_o, y_o) = 0 + y'' = 2$

$$\therefore y_1 = 1 + \frac{1}{1!}0.05 + \frac{2}{2!}0.05^2 + \frac{2}{3!}0.05^3$$

$$y_1 = 1.0525$$

$i = 1{:}\ \ (x_1, y_1) \quad \rightarrow \quad (0.05, 1.0525)$

E-mail: mohammed.ali.saihood@uomus.edu.iq

$$y_2 = y_1 + \frac{y'(x_1, y_1)}{1!}h + \frac{y''(x_1, y_1)}{2!}h^2 + \frac{y'''(x_1, y_1)}{3!}h^3$$

$y_1 = 1.0525$

$y'(x_1, y_1) = x + y = 0.05 + 1.0525 = 1.1025$

$y''(x_1, y_1) = 1 + y' = 1 + 1.1025 = 2.1025$

$y'''(x_1, y_1) = 0 + y'' = 2.1025$

i	x_i	y_i
0	0	1
1	0.05	1.0525
2	0.10	1.1103

$$\therefore y_2 = 1.1025 + \frac{2.1025}{1!}0.05 + \frac{2.1025}{2!}0.05^2 + \frac{2.1025}{3!}0.05^3$$

$y_2 = 1.1103$

$(x_2, y_2) \quad \rightarrow \quad (0.1, 1.1103)$

Problems:

1. **Use Taylor Method to solve the following differential equation at $x = 4.1$**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2 + y}, \quad \text{use } x_o = 4, y_o = 4, \quad h = 0.1.$$

2. **Use Taylor Method to solve the following differential equation at $x = 0.2$**

$$\frac{dy}{dx} = x^2 y - 1, \quad \text{use } x_o = 0, y_o = 1, \quad h = 0.1.$$

3. **Use Taylor Method to solve the following differential equation at $x = 0.4$**

$$\frac{dy}{dx} = -2x - y, \quad \text{use } x_o = 0, y_o = -1, \quad h = 0.2.$$

E-mail: mohammed.ali.saihood@uomus.edu.iq