المحاضرة ((السادسة))

دالة الانتاج في الاجل الطويل

Production Function in Long-Run

ذكرنا سابقاً بأن الأجل الطويل هو الفترة الزمنية التي تسمح للمنتج أن يغير كل عوامل الإنتاج المستخدمة في العملية الإنتاجية وعليه فأن دالة الإنتاج في الأجل الطويل تكون دالة في كل عوامل الإنتاج وتأخذ الصيغة التالية :-

$$Q = f(l \text{ ، } k \text{ ، } a \text{ ،.....})$$

على سبيل المثال في مزرعة معينة للإنتاج البرتقال نفترض من ان هناك عنصرين هما العمل ورأس المال ونفترض أن هناك توليفات مختلفة من كلا العنصرين لإنتاج نفس الكمية من البرتقال.

فإذا تطلب الامر استخدام عنصر العمل بكمية أكبر نسبياً هذا يعني استخدام مقدار أقل من عنصر رأس المال وذلك لإنتاج نفس الكمية من البرتقال ، أما اذ كان عنصر رأس المال المستخدم أكبر فأن ذلك يعني استخدام ساعات أقل من عنصر العمل . لهذا عند استخدام عنصرين متغيرين في العملية الانتاجية فانة يتطلب معرفة الانتاج والاستخدام الامثل لعناصر الانتاج ، اي أن المنحنى الذي يمر بالتوليفات المختلفة من خدمات كل من العمل ورأس المال يحقق نفس مستوى الناتج ويسمى هذا المنحى ب(منحى الناتج المتساوي) .

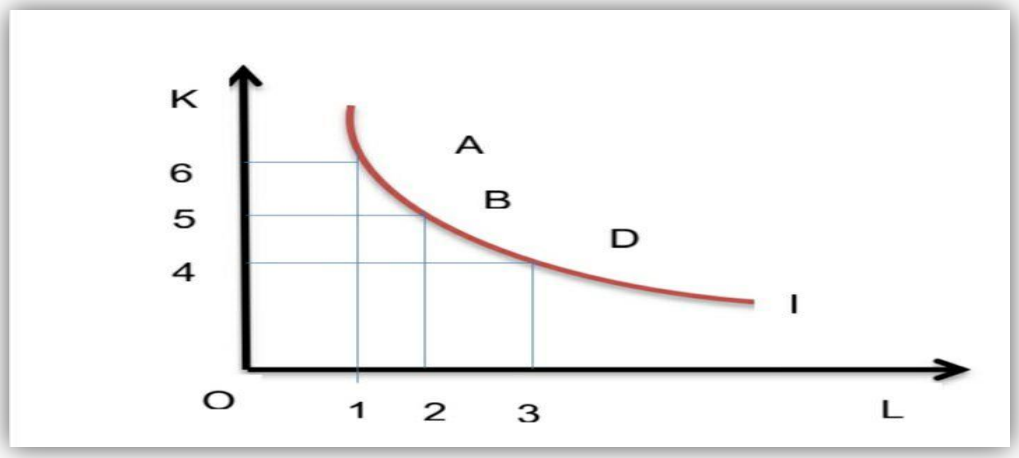
منحنيات الناتج المتساوي :-

المفهوم :- يمثل التوليفات المختلفة من عنصري الانتاج وليكن العمل ورأس المال ، وتعتبر كل نقطة على هذا المنحى ممثلة لنفس لمستوى الانتاج ولكن بتوليفات مختلفة من عنصري الانتاج ، والجدول الاتي يمثل ثلاثة توليفات مختلفة من عنصري العمل ورأس المال لإنتاج سلعة ما ولتكن (×) .

المحاضرة ((السادسة))

التوليفة	L	K	الكمية المنتجة
A	1	6	6 K +1 L =20
B	2	5	5 K + 2 L= 20
C	3	4	4 K + 3 L =20

وهكذا بالنسبة لكل توليفة تقع على نفس منحنى الناتج المتساوي وكما مبين في الشكل ادناه :



منحنى الناتج المتساوي

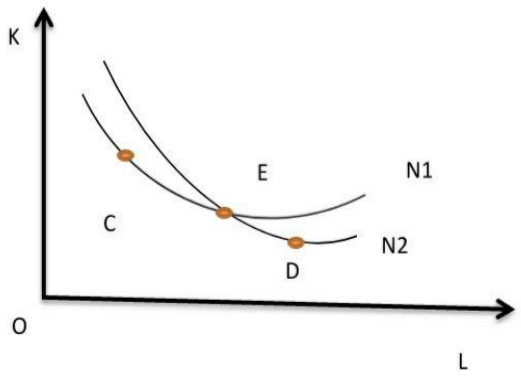
خصائص منحنيات الناتج المتساوي

1.تنحدر من اقصى جهة السار الى اسفل جهة اليمين , , حيث ان الحصول على نفس المستوى من الناتج ستؤدي الى تناقص كمية احد العناصر مع تعويض ذلك بزيادة العنصر الاخر ويمكن توضيح ذلك من خلال الشكل الرياضي الاتي :-

$$\frac{-\Delta K}{\Delta L} = \frac{K2-K1}{L2-L1}$$

2- محدبة باتجاه نقطة الاصل وهذا ناتج عن عملية الاحلال أي احلال احد العنصرين مكان الاخر أي ان الاهمية الحدية لأحد العنصرين تكون في تناقص دائماً . K,L

3- يمكن لها ان تتقاطع لأن تقاطعها يعني ان المنحنى الاعلى يعطي نفس مستوى الانتاج كالمنحنى الادنى وهذا غير منطقي والشكل الاتي يوضح ذلك :-



تقاطع منحنيات الناتج المتساوي

لو نظرنا الى الرسم البياني اعلاه نلاحظ ان النقطة (E) تقع على منحنى الناتج N1 وكذلك النقطة (c) وبالتالي :

فإن (C=E) لأنهما يقعان على نفس المنحنى

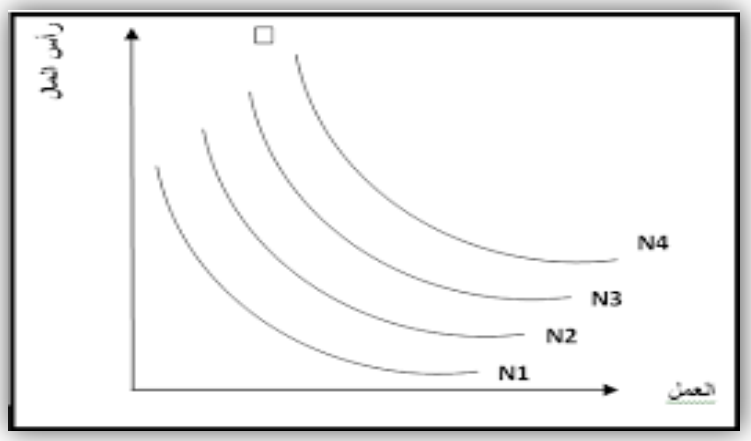
كما ان (E) تقع على منحنى الناتج N2

وكذلك النقطة (D) اذن (E=D), وبما ان (E=C) (E=D)

اذن (C = D) وهذا غير منطقي لأن (D) تقع على منحنى انتاج اعلى مما تقع عليه النقطة (D) فالمنطق يقول ان المنحنيات لا تتقاطع .

خارطة الناتج المتساوي

كلما زادت كمية العناصر الداخلة في العملية الانتاجية فإننا سنحصل على مستويات اكبر من الناتج ومن هنا يمكننا الحصول على خريطة منحنيات للناتج المتساوي , حيث يمثل كل واحد منها مستوى معين من الانتاج , اي انه كلما ابتعدنا عن نقطة الاصل كلما ارتفع مستوى الناتج الى مستوى اعلى وهكذا ,وان ذلك يعود الى استخدام عناصر اكبر في العملية الانتاجية .



خارطة منحنيات الناتج

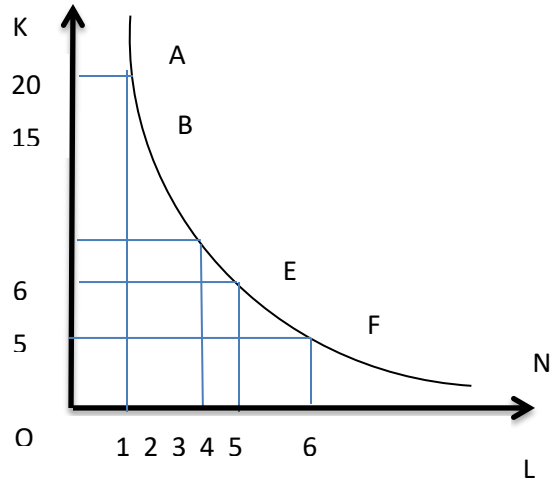
معدل الاحلال الحدي الفني (MRTS) Marginal Rate of Technical Substitution

يعرف بأنه ذلك المقدار الذي يجب التنازل عنه من احد عناصر الانتاج (رأس المال مثلاً) مقابل احلال عنصر الانتاج الاخر(العمل مثلا) بوحدة واحدة ليبقى على نفس مستوى الانتاج او العكس , ويمكن قياسه رياضياً وكالاتي :-

$$\mathbf{MRTS}, K, L = \frac{-\Delta K}{\Delta L} = \frac{K2-K1}{L2-L1}$$

مثال //من خلال الجدول التالي لمنشاة ما :اشتق معدل الاحلال الحدي بين عنصري العمل وراس المال:

التوليفة	L	K	MRTS l ,k =Δ k/ ΔL
A	1	20	-
B	2	15	5:1
C	3	11	4:1
D	4	8	3:1
E	5	6	2:1
F	6	5	1:1

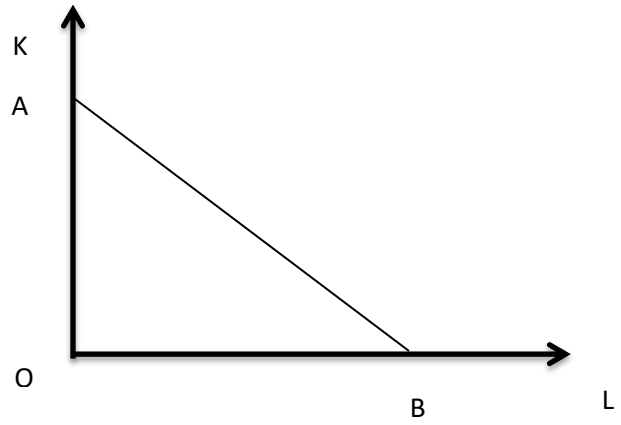


نلاحظ من الجدول والشكل اعلاه ان لأنتاج لسعة ما عند التوليفة (A) نستخدم (20) وحدة من (K) مقابل وحدة واحدة من (L) , اما عند التوليفة (B) نستخدم (15) وحدة من (K) مقابل (2) وحدة من (L) وهذا يعني ان معدل الاحلال الحدي الفني مساوي (5:1) أي اننا نستغني عن (5) وحدات من (K) في سبيل الحصول على وحدة واحدة من (L) وهكذا كلما اتجهنا الى نهاية الجدول والشكل قلت الوحدات التي يمكن ان نضحي بها من(K) مقابل الحصول على وحدة واحدة من ال (L) اي (1:1) .

خط التكاليف المتساوية :- Isolute Costs Line

يمثل هذا الخط التوليفات المختلفة من عنصري الانتاج (k,l) التي تستطيع المنشأة شراؤها في حدود المبلغ المخصص لعناصر الانتاج واسعارها هذه العناصر , وإذا اردنا ان نعرف افضل توليفة من عنصري الانتاج على منحنى الناتج المتساوي علينا رسم خط التكاليف عن طريق الاتي :-

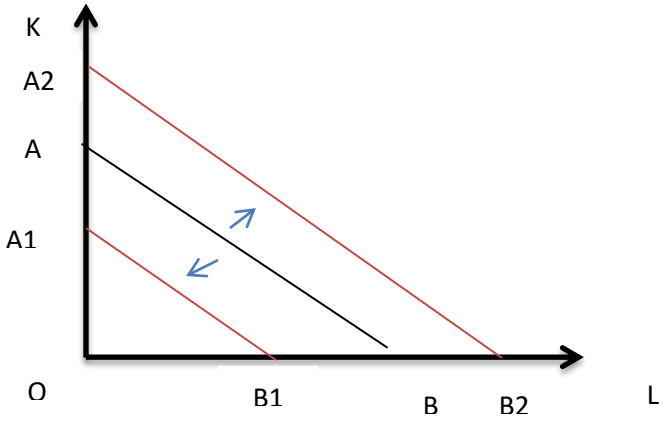
خط التكاليف المتساوية



نفرض ان مصنعا معينا ينفق على شراء (k,l) مبلغ من المال مقداره (c) وبافتراض الشكل الاتي الذي يوضح التكاليف المتساوية .

من الشكل اعلاه نلاحظ انه اذا انفق المصنع مبلغ اجمالي قدره (c) على عنصر راس المال فقط فانه سيحصل على (0A) وحدة من عنصر (K) وبنفس الشيء على عنصر (L) فانه سيحصل على (0B) من هذا العنصر , وعند ربط النقطتين B,A بخط مستقيم فإننا سنحصل على خط التكاليف المتساوية حيث تتساوى تكاليف عنصري الانتاج عند جمع النقاط التي تقع على (AB) والذي يمثل خط التكلفة وبالتالي أي توليفة من (K,L) تقع على (AB) تمثل اجمالي الانفاق والذي يكون مساوياً الى (C) .

خط التكاليف المتساوية



ويمكن ان ينتقل خط التكاليف المتساوية الى الاعلى عندما ترتفع امكانية المنتج ورعبته في زيادة الانتاج ليكون (A2,B2) , وفي حالة تراجع امكانيات المنتج وعجزه

الاقتصادي سينتقل خط التكاليف المتساوي الى الاسفل ليكون عند (A1,B1) وكما موضح بالشكل اعلاه .

الامثلية في الانتاج (المزج الامثل لعناصر الانتاج) Optimization in Production

يصل المنتج الى الوضع التوازني أي انتاج اكبر قدر ممكن من الناتج بالإنفاق المخصص له عندما يصل الى اعلى منحنى انتاج متساوي ممكن بالشروط المفروضة عليه الخاصة بمقدار (c) واسعار عناصر الانتاج(PL,PK) , ويمكن تحقيق الامثلية اذا تحقق الشرطين التاليين :

1-عندما يمس خط التكلفة اعلى منحنى ناتج متساوي حيث ان :-

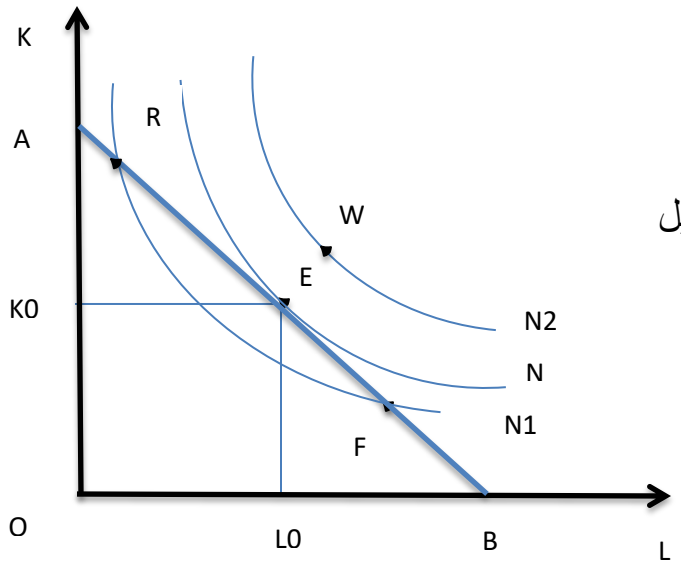
$$\frac{PL}{Pk} = \frac{MPL}{MPk}$$

2- عندما تكون دالة التكاليف $C = P.L + P.k$

أي ان توازن المنتج عبارة عن الاستخدام الامثل لعناصر الانتاج من اجل

أ- تعظيم الانتاج ب – تحقيق اقصى ربح ممكن بأقل تكلفة .

توازن المنتج في الاجل الطويل

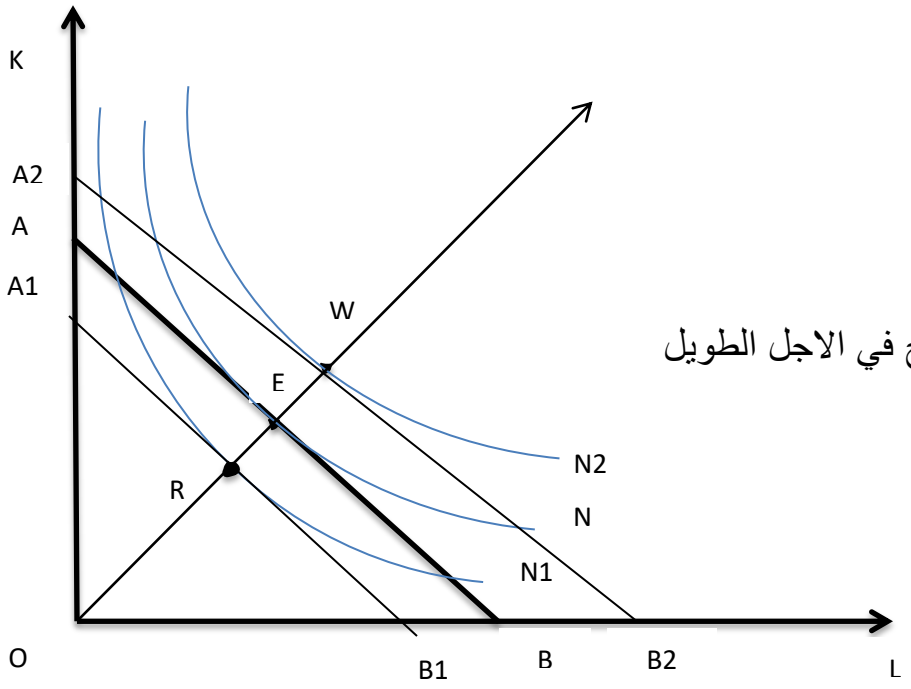


يتضح من الشكل اعلاه ان افضل توليفة في الشكل السابق هي عند النقطة (E) فعند هذه النقطة يكون منحنى الناتج المتساوي مماساً لخط التكاليف عند النقطة(0Lo) لعنصر العمل مضافاً اليه (0ko) من عنصر رأس المال فعند هذه التوليفة تستطيع المنشأة انتاج (A0) وحدة من الناتج عند نفس الانفاق الاجمالي (C), اما عند النقطتين (R) و (F) فلا تتحقق الامثلية لان منحنى السواء (N2) يقطع الميزانية عند هاتين النقطتين وهو دون حدود امكانيات المنتج , اما النقطة (W) فهي لا تحقق شرط الامثلية رغم انها تقع على منحنى سواء اعلى كونها تقع خارج حدود امكانيات المنتج .

توسع الناتج في الاجل الطويل

يبين الشكل التالي آلية توسع الناتج في الاجل الطويل :

:



توسع الناتج في الاجل الطويل

يتضح من الشكل اعلاه إنه مع عدة منحنيات للناتج المتساوي وعدة خطوط للنفقة المتساوية (وبافتراض تساوى أسعار عوامل الإنتاج) فأن الخط المستقيم القادم من نقطة الأصل ويربط بين نقاط التوازن المختلفة(R,E,W) عندما تتغير ميزانية المنتج مع ثبات العوامل الأخرى، أو عندما يتغير سعر احدى عوامل الانتاج مع ثبات العوامل الأخرى، فهو يعبر عن مسار التوسع في الإنتاج، وهو ما يوضح ثبات نسبة رأس المال/العمل في الإنتاج .