H.W 1.4

اوجد الحل الامثل لنماذج البرمجة الخطية الاتية :

i. $Min. Z = 3X_1 + 2X_2$

Sub. to:

$2X_1 + 3X_2 \leq 30$

$5X_1 + 4X_2 \leq 60$

$X_1, X_2 \geq 0$

ii. $Max. Z = 3X_1 + 3X_2$

Sub. to:

$X_1 + X_2 \geq 10$

$X_1 \leq 8$

$X_2 \leq 7$

$X_1, X_2 \geq 0$

iii. $Max. Z = 30X_1 + 10X_2$

Sub. to:

$2X_1 + 4X_2 \geq 20$

$4X_1 + 2X_2 \leq 20$

$X_2 \geq 7$

$X_1, X_2 \geq 0$

iv. $Min. Z = 5X_1 + 15X_2$

Sub. to:

$2X_1 + 2X_2 \leq 20$

$2X_1 + 5X_2 \geq 30$

$X_2 \leq 9$

$X_1, X_2 \geq 0$

v. $Min. Z = 3X_1 + 8X_2$

Sub. to:

$3X_1 + 5X_2 \geq 30$

****

$X_1 \le 7$

$4X_1 + 3X_2 \le 36$

$X_1, X_2 \ge 0$

vi. $Min. Z = X_1 + 2X_2$

Sub. to:

$2X_1 + 3X_2 \ge 18$

$X_1 \ge 2$

$X_2 \ge 2$

$X_1, X_2 \ge 0$

بعض الحالات الخاصة والمشاكل في طريقة الرسم البياني

1. مشكلة الحلول الغير محدودة Unbounded Solutions Problem

وهي المشكلة التي قد تحدث عندما تكون علامة القيود او احدهما (اكبر او يساوي) وان دالة الهدف هي (.Max)، حيث تكون منطقة الحلول مفتوحة وغير محددة وبالتالي لا يمكن ايجاد احل امثل للمشكلة. فمثلا المثال (10.1) لو كانت دالة الهدف (.Max) بدلا من (.Min) فلا يوجد حل امثل للمشكلة بسبب عدم وجود نقاط تقاطع لمنطقة الحلول لانها غير محدودة اي وجود مشكلة الحلول الغير محدودة. كما ان نموذج البرمجة الخطية الاتي هو ايضا يعاني من مشكلة الحلول الغير محدودة.

$Max. Z = 10X_1 + 15X_2$

Sub. to:

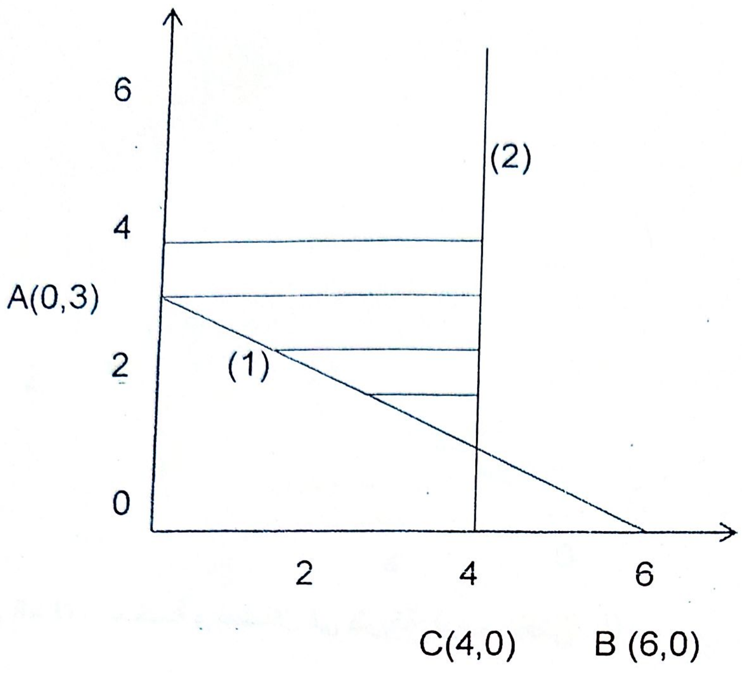
$X_1 + 2X_2 \ge 6$

$X_1 \ge 4$

$X_1, X_2 \ge 0$

حيث ان الرسم البياني لهذا النموذج هو كالاتي:

****

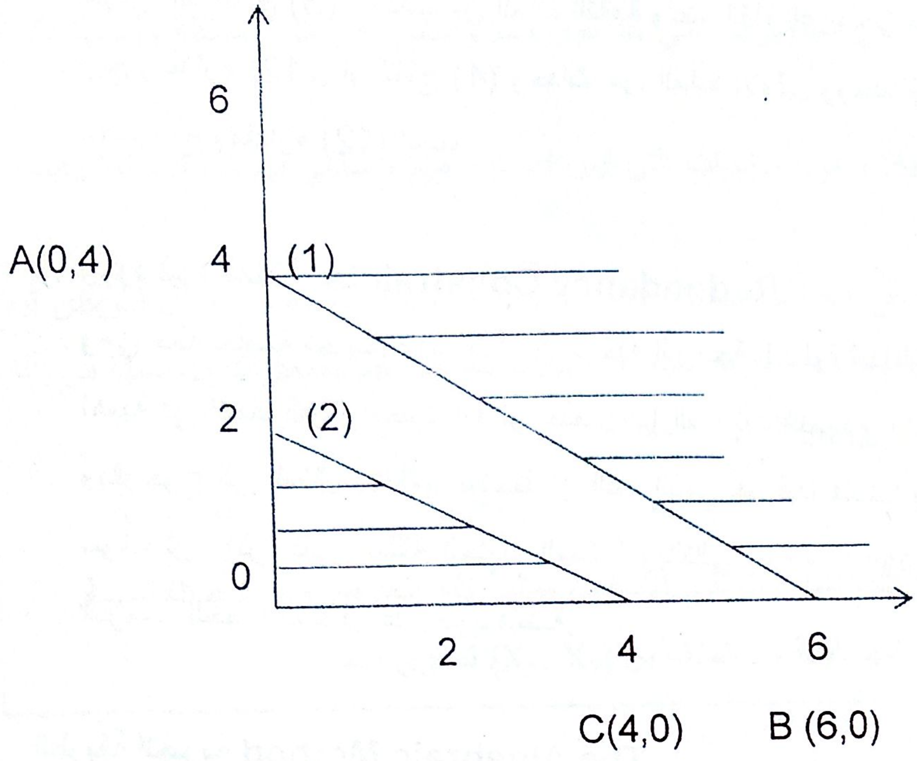


2. الحلول المنحلة Degenerate Solutions

وهي حالة خاصة تحدث عندما يكون احد المتغيرات الاساسية في الحل الامثل يساوي صفر. فمثلا يلاحظ ان الحل الامثل للمثال (8.1) كان يتضمن متغيرا اساسيا واحدا وهو انتاج المادة الاولى فقط وعدم انتاج اي وحدة من المادة الثانية ، اي ان الحل الامثل عبارة عن حلا منحلا.

3. مشكلة عدم وجود حلول مقبولة Infeasible Solutions Problem

وهي المشكلة التي تحدث عندما تكون القيود متعاكسة ولا توجد منطقة مشتركة بينهم، اي عدم وجود منطقة للحل وبالتالي عدم وجود حل امثل. الرسم الاتي يوضح مشكلة عدم وجود حلول مقبولة.



4. تعدد الحلول المثلى Multiple Optimal Solutions

وتحدث هذه الحالة عندما يكون هناك اكثر من حل امثل للمشكلة. فمثلا نموذج البرمجة الاتي:

$Max.Z = 2X_1 + 4X_2$

Sub. to:

$2X_1 + 4X_2 \leq 12$

$X_1 + X_2 \leq 5$

$X_1, X_2 \geq 0$

وباتباع نفس خطوات الحل السابقة، نجد ان نتائج تعويض نقاط التقاطع في دالة الهدف هي

$Max.Z$	$Z = 2X_1 + 4X_2$	نقاط التقاطع
12	$Z = 4 * 3 = 12$	A(0,3)
	$Z = 2 * 5 = 10$	C(5,0)
12	$Z = 2 * 4 + 4 * 1 = 12$	E (4,1)

****

القرار: اما انتاج (3) وحدات من المادة الثانية وعدم انتاج اي وحدة من المادة الاولى لتحقيق اعظم ربح ومقداره (12). او انتاج (4) وحدات من المادة الاولى ووحدة واحدة من المادة الثانية لتحقيق اعظم ربح ومقداره (12) ايضا.

5. وجود قيود فائضة Redundancy Constraints

وهي حالة خاصة تحدث عندما تتضمن مشكلة البرمجة الخطية قيدا او اكثر من قيد فائض وليس له اهمية في اتخاذ القرار بحيث انه لو حذف هذا القيد نت النموذج فانه لن يؤثر على الحل الامثل. وبالرجوع الى المثال (8.1) يلاحظ ان القيد الثاني هو قيدا فائضا بحيث لو تم حذفه من النموذج سوف لن يؤثر على منطقة الحلول الممكنة وبالتالي سوف لن يؤثر على القرار. اي ان نموذج البرمجة الخطية يحتوي على قيود فاضة.

الطريقة الجبرية The Algebraic Method

وهي طريقة اخرى من الطرائق الرياضية الممكن اتباعها لايجاد الحل الامثل لمشكلة نموذج البرمجة الخطية . ويمكن استخدامها اذا كان عدد المتغيرات في نموذج البرمجة الخطية هو (2)، ولكن لا يفضل اتباعها اذا كان عدد المتغيرات في النموذج اكثر من (2) لصعوبة تطبيقها وتعقيدها.

خطوات تطبيق الطريقة الجبرية:

1. تحويل الصيغة الاعتيادية لنموذج البرمجة الخطية الى الصيغة القياسية.
2. تحديد عدد الحالات الممكنة وحسب الصيغة الاتية:

$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

حيث ان:

n: عدد المتغيرات في الصيغة القياسية.

r: عدد القيود.

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

$$2! = 2 * 1 = 2$$

$$3! = 3 * 2 * 1 = 6$$

$$4! = 4 * 3 * 2 * 1 = 24$$

3. تقسيم متغيرات النموذج الرياضي الى قسمين:

i. **المتغيرات الاساسية:** وهي المتغيرات التي لها دور مهم واساسي في حل المشكلة وقيمتها تكون اكبر من الصفر.

ii. **المتغيرات الغير اساسية:** وهي المتغيرات التي ليس لها دور مهم واساسي في حل المشكلة وقيمتها تكون مساوية للصفر.

4. تكوين جدول يتضمن جميع الحالات الممكنة لإيجاد قيم المتغيرات الاساسية من خلال تعويض قيم المتغيرات الغير اساسية في قيود الصيغة القياسية. ومن ثم تعويض قيم المتغيرات الاساسية في دالة الهدف لتحديد الحل الامثل من بين الحالات الممكنة.

ملاحظة/

- **يتم اهمال اي حالة تكون فيها اشارة المتغير الاساسي سالبة لأنه يتعارض مع شرط اللاسلبية.**
- **يتم اهمال اي حالة تكون فيها قيمة كلا المتغيرين (X_1, X_2) تساوي صفر.**

مثال (11.1)

اوجد الحل الامثل لنموذج البرمجة الخطية الاتي باستخدام الطريقة الجبرية:

$$Max.Z = 15X_1 + 10X_2$$

Sub. to:

$$3X_1 + 5X_2 \leq 30$$

$$4X_1 + 6X_2 \leq 40$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

الحل:

الصيغة القياسية:

$$Max.Z = 15X_1 + 10X_2$$

Sub. to:

$$3X_1 + 5X_2 + S_1 = 30$$

$$4X_1 + 6X_2 + S_2 = 40$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2 \geq 0$$

عدد الحالات الممكنة

$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

****

$= \frac{4!}{2!(4-2)!}$

$= 6$

عدد الحالات الممكنة	المتغيرات الغير اساسية	المتغيرات الاساسية	$Z = 15X_1 + 10X_2$	$Max.$
1	$X_1 = 0, X_2 = 0$	$S_1 = 30, S_2 = 40$	$Z = 0$	
2	$X_1 = 0, S_1 = 0$	$X_2 = 6, S_2 = 4$	$Z = 10 * 6 = 60$	
3	$X_1 = 0, S_2 = 0$	$X_2 = 6.7, S_1 = -3.5$	تهمل	
4	$X_2 = 0, S_1 = 0$	$X_1 = 10, S_2 = 0$	$Z = 15 * 10 = 150$	150
5	$X_2 = 0, S_2 = 0$	$X_1 = 10, S_1 = 0$	$Z = 15 * 10 = 150$	150
6	$S_1 = 0, S_2 = 0$	$X_1 = 10, X_2 = 0$	$Z = 15 * 10 = 150$	150

ايجاد قيم المتغيرات الاساسية للحالة الاخيرة كالاتي:

$$3X_1 + 5X_2 = 30 \qquad (1)$$

$$4X_1 + 6X_2 = 40 \qquad (2)$$

ضرب المعادلة (1)*4 والمعادلة (2)*3 ينتج:

$$12X_1 + 20X_2 = 120$$

$$12X_1 + 18X_2 = 120$$

$$2X_2 = 0 \quad \text{بالطرح}$$

$$\boxed{X_2 = 0}$$

بالتعويض في المعادلة (1) ينتج:

$$3X_1 = 30$$

$$\boxed{X_1 = 10}$$

القرار:

انتاج (10) وحدات من المادة الاولى وعدم انتاج اي وحدة من المادة الثانية لتحقيق اعظم ربح ومقداره (150).

مثال (12.1)

اوجد الحل الامثل لنموذج البرمجة الخطية الاتي باستخدام الطريقة الجبرية:

$$Min.Z = 6X_1 + 8X_2$$

Sub. to:

$$X_1 + 2X_2 \leq 200$$

$$3X_1 + 2X_2 \leq 300$$

$$X_1 \leq 100$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

الحل:

الصيغة القياسية:

$$Max.Z = 6X_1 + 8X_2$$

Sub. to:

$$X_1 + 2X_2 + S_1 = 200$$

$$3X_1 + 2X_2 + S_2 = 300$$

$$X_1 + S_3 = 100$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

عدد الحالات الممكنة

$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$= \frac{5!}{3!(5-3)!}$$

$$= 10$$

عدد الحالات الممكنة	المتغيرات الغير اساسية	المتغيرات الاساسية	$Z = 6X_1 + 8X_2$	$Min.$
1	$X_1 = 0, X_2 = 0$	$S_1 = 200, S_2 = 300, S_3 = 100$	$Z = 0$	
2	$X_1 = 0, S_1 = 0$	$X_2 = 100, S_2 = 100, S_3 = 100$	$Z = 8 * 100 = 800$	
3	$X_1 = 0, S_2 = 0$	$X_2 = 150, S_1 = -100, S_3 = 100$	تهمل	
4	$X_1 = 0, S_3 = 0$	$X_2 = 0, S_1 = 200, S_2 = 300$	تهمل	
5	$X_2 = 0, S_1 = 0$	$X_1 = 200, S_2 = -300, S_3 = -100$	تهمل	