جامعة المســــــــــتقبل

كلية العلوم الإدارية

قسم إدارة الأعمال

مادة الرياضيات

2024-2023

تدريسي المادة الدكتور رياض مالك الحسني

[1-3] مقدمــة

تلعب المصفوفات دوراً مهماً في علم الرياضيات وعلم الاحصاء وعلم الاقتصاد والمجالات الاخرى مثلاً الحاسبات، وهندسة الكهرباء والاتصالات والعلوم الاخرى.

وكان للعالم الياباني سيكي كووا (1683) والعالم الالماني ليبنز (1693) الفضل في اكتشاف المصفوفات والمحددات وذلك من خلال العمل بطريقة الصينيين القدماء في حل المعادلات الآنية عن طريق استخدام اعواد من البوص ووضعها في مربعات بتنظيم معين مشابه لطريقة حساب محددة المصفوفة. لقد نشر ليبنز اول مثال عن المصفوفات والمحددات بعد ذلك بعشر سنوات.

أما العالم كيلي (1821) فقد قدم سنة (1857) نوعاً آخر من الجبر هو جبر المصفوفات.

وفي عام 1750 طور كرامر طرق حل المعادلات الخطية بأستخدام المحددات، ان للمحددات والمصفوفات تطبيقات كثيرة في الرياضيات. كهندسة التحويلات النقطية. والهندسة المستوية وهندسة الفضاء. وامتد هذا الاهتمام ليشمل مجالات عدة مثل: مجالات التخطيط والتجارة والاقتصاد والصناعة والزراعة وعلوم الفيزياء والاحياء وغيرها.

ومن أهم الاستخدامات الحديثة للمصفوفات كونها اسلوباً رئيسياً لتزويد الحاسب الالي بالبيانات وكذلك تبسيطها اساليب عمله الى حد كبير وفي هذا الفصل سنعرف المصفوفة وبعض العمليات عليها. ونعرف محدد المصفوفة وكيفية استخدامه في حل المعادلات الاتية بطريقة كرامر.

[2 – 3] المصفوفات وخواصها Matrices and their properties

في اغلب مجالات الرياضيات والاحصاء والعلوم الاخرى يتم تبويب وتنظيم البيانات حيث ترتب بشكل قاعدة منظمة من البيانات .

مثلاً في الجدول الآتي اعداد تبين ترتيب أول أربعة فرق في الدوري العراقي لكرة القدم سابقاً بعد مرور **10** مباريات من بدء الدوري الممتاز .

اسم الفريق	عدد الفوز	التعادل	الخسارة	النقط
الزوراء	6	3	1	21
الجوية	5	2	3	17
الطلبة	5	1	4	16
الشرطة	4	3	3	15

لو اخذنا الاعداد فقط واهملنا التسميات لحصلنا على الجدول الآتي :

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 & 21 \\ 5 & 2 & 3 & 17 \\ 5 & 1 & 4 & 16 \\ 4 & 3 & 3 & 15 \end{bmatrix}$$

نلاحظ ان العمود الاول يمثل اعداد المباريات التي فاز فيها كل فريق والصف الاول يحتوي على اعداد تمثل نتائج فريق الزوراء من فوز وتعادل وخسارة وعدد النقط .

مثلاً عندما نسأل عن عدد تعادلات نادي الطلبة فأن الصف الثالث يمثل نتائج نادي الطلبة والعمود الثاني يمثل عدد التعادلات فالعدد الموجود في الصف الثالث والعمود الثاني هو **1** يمثل عدد تعادلات نادي الطلبة .

وبنفس الطريقة نجد عدد الفوز لنادي الشرطة والذي هو في الصف الرابع والعمود الاول والعدد هو **4** .

وهذا التنظيم العددي للبيانات وبهذا الشكل يسمى بالمصفوفة **Matrix** .

مثال : البيانات الآتية تبين المعدل (الوسط الحسابي) لدرجات الطلاب في احدى الثانويات في مادتي اللغة الانكليزية والرياضيات للامتحانات الوزارية للمرحلتين المتوسطة والاعدادية (العلمي فقط) للسنوات 2006 - 2007 - 2008

السنة	اللغة الانكليزية		الرياضيات	
	المتوسطة	الاعدادي	المتوسطة	الاعدادي
2006	58	63	61	69
2007	56	65	64	67
2008	62	69	68	71

لو اخذنا المعدلات فقط دون ذكر التفاصيل نحصل على الجدول الآتي :

$$\begin{bmatrix} 58 & 63 & 61 & 69 \\ 56 & 65 & 64 & 67 \\ 62 & 69 & 68 & 71 \end{bmatrix}$$

اعداد الصف الاول تمثل معدلات للعام 2006 ومعدلات العمود الثالث مثلاً تمثل درجات الرياضيات للمرحلة المتوسطة. وهكذا لبقية الصفوف والاعمدة.

فالتنظيم العددي للبيانات بهذا الشكل المستطيل يسمى بالمصفوفة **Matrix**.

تعريف (1 - 3)

المصفوفة عبارة عن ترتيب للاعداد على شكل مستطيل مرتبة بشكل صفوف (**rows**) عددها **m** واعمدة (**columns**) عددها **n** حيث **n** , **m** اعداد صحيحة موجبة.

يرمز للمصفوفة بالحرف الكبير **A** أو **B** وهكذا وتقرأ المصفوفة **A** أو **B**

مثلاً

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -4 & 1 & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

2×2 $\qquad$ 2×3

نلاحظ عند كتابة المصفوفة نضع الاعداد بين قوسين كبيرين وعدد الصفوف **m** وعدد الاعمدة **n** .

[3 – 3] رتبة المصفوفة Order of a matrix

لكل مصفوفة رتبة تتمثل بعدد الصفوف أولاً ثم عدد الاعمدة ثانياً وتكتب $m \times n$ حيث عدد الصفوف **m** , عدد الاعمدة **n**

مثلاً

$$A = \begin{bmatrix} 40 & 31 & 45 \\ 30 & 41 & 36 \end{bmatrix}$$ رتبتها 2×3

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$ رتبتها 1×3

$$C = \begin{bmatrix} -2 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} \quad 2 \times 1 \qquad D = \begin{bmatrix} 7 \end{bmatrix} \quad 1 \times 1 \qquad J = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 5 & -4 & 6 \\ 7 & -2 & 1 \\ 8 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad 4 \times 3$$

الاعداد الموجودة في المصفوفة تدعى بعناصر المصفوفة (**Elements**)

مثلاً

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 16 & 4 & 5 \\ 15 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$ رتبتها 3×3

ماذا يعني a_{12} ؟ يعني العنصر الموجود في الصف الاول والعمود الثاني $a_{12} = -2$

وكذلك a_{23} يعني العنصر الموجود في الصف الثاني والعمود الثالث

$a_{23} = 5$

وهكذا لبقية العناصر

ويمكن الكتابة بالصورة $A = [a_{ij}]$ حيث $\quad i = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots\ldots m$

$j = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots\ldots n$

تعريف (2 - 3) تساوي مصفوفتين

يقال للمصفوفتين انهما متساويتين اذا وفقط اذا تحقق الشرطان :

1 - المصفوفتان لهما نفس الرتبة .

2 - عناصر المصفوفة الاولى تساوي نظائرها من عناصر المصفوفة الثانية .

مثلاً

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & -0.5 \\ -4 & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \quad 2\times2 \qquad\qquad A = \begin{bmatrix} 0.1 & -\frac{1}{2} \\ -4 & 0.75 \end{bmatrix} \quad 2\times2$$

نلاحظ : 1 : ان المصفوفتين A, B لهما نفس الرتبة 2×2

2 : $b_{2} = a_{2} = -0.5 = -\frac{1}{2} \qquad b_{21} = a_{21} = -4$

اي انه كل عنصر في المصفوفة A يساوي نظيره في المصفوفة B

$\therefore \; B = A$

مثال 1

بين هل ان المصفوفتين

$$B = \begin{bmatrix} 6 & \sin\frac{\pi}{6} \\ \cos\frac{\pi}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \qquad\qquad A = \begin{bmatrix} 6 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0.25 \end{bmatrix}$$

متساويتان ؟

الحل

نلاحظ ان المصفوفتين B , A لهما نفس الرتبة 2×2 وكذلك

$a_{12} = b_{12} = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \qquad a_{11} = b_{11} = 6$

$a_{22} = b_{22} = 0.25 = \frac{1}{4} \qquad b_{21} = a_{21} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4}$

المصفوفتان B , A متساويتان ويقال $A = B$

مثال 2

هل ان المصفوفتين متساويتان في كل مما يأتي؟

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \\ 0.8 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \\ \frac{4}{5} & \frac{10}{2} \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

الحل

a- $\because$ العنصر في الصف الاول العمود الاول في المصفوفة A هو 2

العنصر في الصف الاول العمود الاول في المصفوفة B هو 1

اي انه $b_{11} \neq a_{11}$ لذلك $A \neq B$

b - $\because$ رتبة المصفوفة A هي 2×2

ورتبة المصفوفة B هي 1×3

$\therefore$ المصفوفة $A \neq$ المصفوفة B

مثال 3

جد قيم x , y حيث $x , y \in R$ في كل مما يأتي:

(1) $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ y+8 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2x-1 \\ 12 & 1 \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} 2x & 5 \\ 5y-1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4x & 2 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} x+1 & -4 \\ 0 & 3x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y-2 & -4 \\ 0 & y-1 \end{bmatrix}$

الحل

$\because$ المصفوفتان متساويتان $\therefore$ العناصر المتناظرة في المصفوفتين متساويتين (1)

كذلك $y + 8 = 12$ $\quad$ $\therefore\ 2x - 1 = 7$

$y = 12 - 8$ $\quad$ $2x = 7 + 1$

$y = 4$ $\quad$ $2x = 8$

$x = 4$

$\because$ المصفوفتان متساويتان $\therefore$ العناصر المتناظرة في المصفوفتين متساويتين (2)

$\therefore 2x = 1$

$\therefore x = \frac{1}{2}$

$5y - 1 = 4x$ كذلك

$5y = 1 + \cancel{4}^{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \Rightarrow 5y = 1 + 2 \Rightarrow 5y = 3 \Rightarrow y = \frac{3}{5}$

$\because$ المصفوفتان متساويتان

$3x = y - 1$ وكذلك $\therefore\ x + 1 = y - 2$

$3x - y = -1 \ \ldots\ldots\ldots\ldots 2$ $\quad$ $x - y = -3 \ \ldots\ldots\ldots 1$

$$\begin{array}{r} x - y = -3 \\ \mp 3x \pm y = \pm 1 \\ \hline -2x = -2 \end{array}$$ بالطرح

$\therefore x = \frac{-2}{-2}$

$x = 1$

نعوض في المعادلة (1) عن x

$1 - y = -3$

$-y = -4$

$y = 4$

[4 – 3] انواع المصفوفات

فيما يلي بعض انواع المصفوفات

1 – المصفوفة المربعة Square Matrix : هي مصفوفة تكون فيها عدد الصفوف m مساوي لعدد الاعمدة n اي انه $m = n$ وتكون رتبة المصفوفة بالشكل $m \times m$ أو $n \times n$ مثلاً :

$$B = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & -1 \\ 8 & 9 & 11 \end{bmatrix} \quad 3\times3$$ مصفوفة مربعة

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} \quad 2\times2$$ مصفوفة مربعة

2 – مصفوفة الصف Row Matrix : وهي مصفوفة تتكون من صف واحد فقط أي $m = 1$ مثلاً:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} \quad 1\times2 \qquad B = \begin{bmatrix} -4 & 5 & 7 & 2 \end{bmatrix} \quad 1\times4$$

3 – مصفوفة العمود Colum Matrix : وهي مصفوفة تتكون من عمود واحد فقط أي : $n = 1$

مثلاً :

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad 2\times1 \qquad A = \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix} \quad 3\times1$$

4 – المصفوفة الصفرية Zero Matrix : وهي مصفوفة جميع عناصرها مساوية للصفر مثلاً:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 1\times3 \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 2\times2 \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 2\times3$$

5 – مصفوفة الوحدة Unit Matrix : هي مصفوفة جميع عناصرها صفراً عدا عناصر القطر الرئيسي تساوي 1

[عناصر القطر الرئيسي هي $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots\ldots$]

مثلاً

$$C = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \quad 1\times1 \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 2\times2 \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 3\times3$$

[3 - 5] جمع المصفوفات Addition of Matrix

لاحظ المثال الاتي : لدينا ثلاث طلاب متفوقين اشتركوا في اختبارات لأسئلة الذكاء وهي اسئلة علمية واسئلة رياضية واسئلة ثقافية وكانت درجاتهم في الاختبارات كالآتي :

	اسئلة علمية	اسئلة ثقافية	اسئلة رياضية
الطالب الاول	7	6	8
الطالب الثاني	9	7	9
الطالب الثالث	8	9	7

لمعرفة اي من الطلاب الثلاث فاز بالاختبارات وحصل على أعلى الدرجات نجمع الدرجات وكالآتي :

$$\begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8+6+7 \\ 9+7+9 \\ 7+9+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 25 \\ 24 \end{bmatrix}$$

نلاحظ ان الطالب الثاني حصل على اعلى الدرجات وهي 25 ويعتبر الفائز ، لذلك عندما يراد جمع مصفوفتين يقتضي ان تكون لهما نفس الرتبة ثم نجمع كل عنصر في المصفوفة الاولى مع نظيره في المصفوفة الثانية .

تعريف (3-3)

اذا كانت $A = [\,aij\,]$, $B = [\,bij\,]$ مصفوفتين لهما نفس الرتبة $m \times n$

فان $A + B = [\,aij + bij\,]$

مثال 4

جد ناتج ما يلي :

1 – $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

2 – $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0.5 & 0.3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{7}{3} & \frac{3}{2} \\ 0.4 & 0.01 \end{bmatrix}$

3 – $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & -3 \\ 8 & \sqrt{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & -1 \\ 5 & 4\sqrt{3} \end{bmatrix}$

الحل

$$1-\ \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+1 & -1+8 \\ 5+2 & 4+(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$2-\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0.5 & 0.3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{7}{3} & \frac{3}{2} \\ 0.4 & 0.01 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}+\frac{7}{3} & \frac{1}{2}+\frac{3}{2} \\ 0.5+0.4 & 0.3+0.01 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{3} & \frac{4}{2} \\ 0.9 & 0.31 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{3} & 2 \\ 0.9 & 0.31 \end{bmatrix}$$

$$3-\begin{bmatrix} \sqrt{2} & -3 \\ 8 & \sqrt{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & -1 \\ 5 & 4\sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\sqrt{2} & -4 \\ 13 & 5\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

مثال 5

اذا علمت ان

$$\begin{bmatrix} 3 & x \\ 5 & y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

جد قيمتي x , y حيث $x , y \in R$

الحل

$$\begin{bmatrix} 3+4 & x+2 \\ 5-1 & y+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$y + 3 = 2$ وكذلك $x + 2 = 6$

$y = 2 - 3$ وكذلك $x = 6 - 2$

$y = -1$ وكذلك $x = 4$

مثال 6

اذا كانت :

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

جد كل من : 1 − $A+B$ 2 − $A+C$ 3 − $B+C$

الحل

1− $$A + B = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3+1 & 5+(-2) \\ 2+4 & -1+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$$

2− $$A + C = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3+0 & 5+8 \\ 2+4 & -1+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 13 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

3− $$B + C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$$

[6 − 3] نظير المصفوفة بالنسبة لعملية الجمع

اذا كانت المصفوفة $A = [\,a_{ij}\,]$ فأن $-A = [\,-a_{ij}\,]$ تسمى بالنظير الجمعي للمصفوفة A

مثلاً اذا كانت $A_{2\times 2}$ مصفوفة فأن $-A_{2\times 2}$ تسمى نظير المصفوفة A بالنسبة لعملية الجمع حيث

$$A + (-A) = (-A) + A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

اي انه إذا كان ناتج جمع مصفوفتين هو مصفوفة صفرية فيقال ان احدى المصفوفتين هي نظير المصفوفة الاخرى بالنسبة لعملية الجمع وتسمى المصفوفة الصفرية بالمصفوفة المحايدة في عملية الجمع (Neutral Matrix).

مثال 7

ما هو النظير الجمعي للمصفوفات الآتية ؟

$1)\quad A = \begin{bmatrix} -0.8 & 2 \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad 2)\quad B = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 3 & -4 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

الحل

1 / ∵ $A = \begin{bmatrix} -0.8 & 2 \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$

∴ نظير المصفوفة A بالنسبة لعملية الجمع هي المصفوفة $-A$

$$-A = \begin{bmatrix} 0.8 & -2 \\ -\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$$

لانه

$$A + (-A) = \begin{bmatrix} -0.8 + 0.8 & 2 + (-2) \\ \sqrt{3} + (-\sqrt{3}) & -1 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2/ ∵ المصفوفة $B = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 3 & -4 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ فأن نظيرها الجمعي $-B = \begin{bmatrix} 2 & -5 & -1 \\ -3 & 4 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

لانه

$$B + (-B) = \begin{bmatrix} -2 + 2 & 5 + (-5) & 1 + (-1) \\ 3 + (-3) & -4 + 4 & \frac{1}{2} \; (-\frac{1}{2}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وكذلك

$$-B + B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ملاحظة

1 – عند ايجاد النظير الجمعي لأي مصفوفة نغير اشارة كل عنصر في المصفوفة اي انه نأخذ النظير الجمعي لكل عنصر في المصفوفة.

2 – اذا كانت A , B مصفوفتان لهما نفس الرتبة فأن $A - B = A + (-B)$

[7 – 3] خواص عملية الجمع على المصفوفات

1 – عند جمع مصفوفتين لهما نفس الرتبة $m \times n$ فالناتج هو مصفوفة لها نفس الرتبة $m \times n$ مثلاً:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}_{2\times3} + \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 5 & 6 & -7 \end{bmatrix}_{2\times3} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 9 & 4 & -2 \end{bmatrix}_{2\times3}$$

2 – عملية جمع مصفوفتين تتمتع بخاصية الابدال (Commutative) اذا كان A, B مصفوفتان لهما نفس الرتبة $m \times n$ فان $A + B = B + A$ لانه :

$$A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] \quad a_{ij}, b_{ij} \in R$$

وتتمتع بخواص جمع الاعداد الحقيقية $[a_{ij}] + [b_{ij}] = [b_{ij} + a_{ij}] = B + A \quad \therefore A + B = B + A$

مثال 8

ليكن

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -4 & 7 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$$

نلاحظ

$$A + B = \begin{bmatrix} 3 + (-4) & 2 + 7 \\ 1 + 5 & 0 + 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 9 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

وكذلك

$$B + A = \begin{bmatrix} -4 + 3 & 7 + 2 \\ 5 + 1 & 8 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 9 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

اي انه $A + B = B + A$

3 – عملية جمع المصفوفات تتمتع بخاصية التجميع (Associative) اذا كانت A, B, C مصفوفات لها نفس الرتبة $m \times n$ فأن :

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

مثال 9

لتكن

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$$

جد :

1/ $(A + B) + C$

2/ $A + (B + C)$

الحل

$$(A+B)+C=\begin{bmatrix}-4+0 & 2+(-2)\\ 5+3 & 1+7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-4 & 1\\ -3 & 8\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-4 & 0\\ 8 & 8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-4 & 1\\ -3 & 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4+(-4) & 0+1\\ 8+(-3) & 8+8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8 & 1\\ 5 & 16\end{bmatrix}$$

$$A+(B+C)=\begin{bmatrix}-4 & 2\\ 5 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0+(-4) & -2+1\\ 3+(-3) & 7+8\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-4 & 2\\ 5 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-4 & -1\\ 0 & 15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4+(-4) & 2+(-1)\\ 5+0 & 1+15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8 & 1\\ 5 & 16\end{bmatrix}$$

نلاحظ من 2 ، 1 أن : $(A+B)+C=A+(B+C)$

4 – وجود المصفوفة المحايدة في عملية الجمع وهي المصفوفة الصفرية :

لتكن A مصفوفة من الرتبة $m\times n$ توجد مصفوفة صفرية من الرتبة $m\times n$ فأن

A = A + المصفوفة الصفرية $m\times n$ = المصفوفة الصفرية $m\times n$ + A

مثلاً لتكن

$A=\begin{bmatrix}-\sqrt{5} & 4\\ 6 & -2\\ 5 & 1\end{bmatrix}$ نلاحظ ان المصفوفة $\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ محايدة

$$\begin{bmatrix}-\sqrt{5} & 4\\ 6 & -2\\ 5 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\sqrt{5}+0 & 4+0\\ 6+0 & -2+0\\ 5+0 & 1+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\sqrt{5} & 4\\ 6 & -2\\ 5 & 1\end{bmatrix}$$

وكذلك

$$\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\sqrt{5} & 4\\ 6 & -2\\ 5 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\sqrt{5} & 4\\ 6 & -2\\ 5 & 1\end{bmatrix}$$

5 – وجود النظير الجمعي للمصفوفة (Additive Inverse) :

اذا كانت A مصفوفة من الرتبة $m\times n$ توجد مصفوفة $-A$ من نفس الرتبة $m\times n$ تسمى بالنظير الجمعي للمصفوفة A حيث $A+(-A)=(-A)+A=0$, 0 مصفوفة صفرية من الرتبة $m\times n$

[8 – 3] ضرب المصفوفة بعدد حقيقي

لاحظ عزيزي الطالب هذا المثال

محل لبيع المرطبات وضع قائمة تمثل الاسعار (بالألف دينار) لانواع واحجام المرطبات التي يبيعها وهي كالآتي:

	قدح كبير	قدح وسط	قدح صغير
بالكاكاو	5	3.5	2.5
مشكل	4.5	3	2
حليب بالفستق	6	4	3

اراد ان يرفع اسعار المرطبات. اقترح ان يضرب هذه الاسعار بالعدد 1.5 فحصل على الجدول الآتي:

	قدح كبير	قدح وسط	قدح صغير
بالكاكاو	7.5	5.25	3.75
مشكل	6.75	4.5	3
حليب بالفستق	9	6	4.5

اي انه ضرب كل عدد في القائمة بالعدد 1.5 وحصل على هذه الاسعار.

تعريف (3-4)

اذا كانت $A = \left[a_{ij} \right]$ مصفوفة من الرتبة $m \times n$ و $K \in R$

فأن $k \cdot A = \left[K \cdot a_{ij} \right]$

مثال 10

جد ناتج

$$3 \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ \frac{1}{3} & 4 \end{bmatrix}$$

الحل

$$3 \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ \frac{1}{3} & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \times (-2) & 3 \times 7 \\ 3 \times \frac{1}{3} & 3 \times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 21 \\ 1 & 12 \end{bmatrix}$$

مثال 11

اذا كان

$$A = \begin{bmatrix} 3\sqrt{2} & 5 \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \quad , \quad L = -2 \ ، \ K = \sqrt{2}$$

جد :

1 / $K \cdot A$ **2 /** $L \cdot A$ **3 /** $KL \cdot A$

الحل

1 / $$K \cdot A = \sqrt{2}\begin{bmatrix} 3\sqrt{2} & 5 \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \times 3\sqrt{2} & \sqrt{2} \times 5 \\ \sqrt{2} \times 1 & \sqrt{2} \times \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{bmatrix}$$

2 / $$L \cdot A = -2\begin{bmatrix} 3\sqrt{2} & 5 \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \times 3\sqrt{2} & -2 \times 5 \\ -2 \times 1 & -2 \times \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6\sqrt{2} & -10 \\ -2 & -2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

3 / $$KL \cdot A = \sqrt{2} \times (-2)\begin{bmatrix} 3\sqrt{2} & 5 \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \times 5 \\ -2\sqrt{2} \times 1 & -2\sqrt{2} \times \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & -10\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & -4 \end{bmatrix}$$

[1 – 8 – 3] بعض الخواص لعملية ضرب عدد في مصفوفة

ليكن A , B مصفوفتين لهما نفس الرتبة . $K, L \in R$

1/ $K\,[A+B] = K\,A + K\,B$

2/ $(K\,L)\,A = K\,(L\,A)$

3/ $(K+L)\,A = K\,A + L\,A$

4/ $K\,A = K\,B$ $K \neq 0$ فأن $A = B$

5/ $1\,A = A$

6/ $K\,A =$ مصفوفة صفرية فأن $K = 0$ أو A مصفوفة صفرية

7/ $-1\,A = -A$

مثال 12

جد المصفوفة A اذا علمت ان

$$-5\left(A - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right) = -6A + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

الحل

$$-5\,A + 5\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = -6\,A + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$-5\,A + \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} = -6\,A + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$6A - 5A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & -5 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3+(-5) & 1+(-5) \\ -1+5 & 5+0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

تمارين [1 – 3]

س1 : جد قيمتي x , y حيث $x , y \in R$ في كل مما يأتي :

1) $\begin{bmatrix} 3x + y & 0.2 \\ 3\sqrt{2} & x - y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & \frac{1}{5} \\ 3\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} \sin x & 3 \\ -2 & \cos x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 3 \\ -2 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} x^2 & 6 \\ y^2 - y & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 15 & 4 \end{bmatrix}$

س2 : جد ناتج ما يلي :

1) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 4 & 6 \\ -11 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

2) $4 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} 3\sqrt{5} & -\frac{1}{4} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\sqrt{5} & \frac{1}{8} \\ \sqrt{2} & 3\sqrt{3} \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1.6 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0.9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

س3 : جد المصفوفة x في كل مما يأتي :

1) $2x + \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$

2) $x - \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 5 & 2 & -3 \\ 6 & -1 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 7 & 5 \\ 6 & 8 & -2 \\ -4 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

س4 : اذا كانت $C = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -4 & 3 & -2 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ جد المصفوفات الاتية :

1) $2A + 3B + C$

2) $A - B + 5C$

3) $3A + B + C$

4) $-A + 2B - C$

9 – 3 المحددات وخواصها Determinats and their properties

محدد المصفوفة **The Determinat of A Matrix** : هو عدد حقيقي يستخرج من المصفوفة المربعة .

تعريف

المصفوفة $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ فأن $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ يسمى محدد المصفوفة ويرمز له Δ وأن

عدد حقيقي $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

مثال 13

جد قيمة كل مما يأتي :

1) $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & -3 \\ 2 & 3\sqrt{2} \end{vmatrix}$ 3) $\begin{vmatrix} \frac{1}{4} & 3 \\ 1 & \frac{3}{2} \end{vmatrix}$ 4) $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 10 \end{vmatrix}$

الحل

1) $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 4 \times 3 - 1 \times (-2) = 12 + 2 = 14$

2) $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & -3 \\ 2 & 3\sqrt{2} \end{vmatrix} = \sqrt{2} \times 3\sqrt{2} - (-3) \times 2 = 6 + 6 = 12$

3) $\begin{vmatrix} \frac{1}{4} & 3 \\ 1 & \frac{3}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \times \frac{3}{2} - 3 \times 1 = \frac{3}{8} - 3 = \frac{3-24}{8} = -\frac{21}{8}$

4) $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 10 \end{vmatrix} = 3 \times 10 - 5 \times 6 = 30 - 30 = 0$

ملاحظة

اذا كان محدد مصفوفة ما يساوي صفراً فتسمى المصفوفة بالمصفوفة المنفردة (**Singular Matrix**)

مثال 14

جد قيمة h في كل مما يأتي $h \in R$

1) $\begin{vmatrix} 2h+3 & -1 \\ 2 & h \end{vmatrix} = 1$

الحل

$(2h+3)\times h - (-1)\times 2 = 1$

$2h^2 + 3h + 2 = 1$

$2h^2 + 3h + 2 - 1 = 0$

$2h^2 + 3h + 1 = 0$

$(2h + 1)(h + 1) = 0$

$\therefore 2h + 1 = 0$ or $h + 1 = 0$

$2h = -1$ $\quad$ $h = -1$

$h = -\frac{1}{2}$

2) $\begin{vmatrix} 3h & -2 \\ 3 & h \end{vmatrix} = 9$

الحل

$3h^2 + 6 = 9$

$3h^2 = 9 - 6$

$h^2 = \frac{3}{3}$

$h^2 = 1$

$\therefore h = \mp 1$

Simultaneous Equations المعادلات الآنية [3 – 10]

تستخدم المحددات في حل معادلتين من الدرجة الاولى ذات متغيرين حيث

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$
$$a_2 x + b_2 y = c_2$$

اعدادحقيقية $a_1 , a_2 , b_1 , b_2 , c_1 , c_2$

$$\left.\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \times b_2 \\ \times b_1 \end{array}$$

نحصل

$$a_1 b_2 x + b_1 b_2 y = c_1 b_2$$
$$\mp a_2 b_1 x \mp b_1 b_2 y = \mp c_2 b_1 \quad \text{بالطرح}$$

$$a_1 b_2 x - a_2 b_1 x = c_1 b_2 - c_2 b_1$$
$$x [a_1 b_2 - a_2 b_1] = c_1 b_2 - c_2 b_1$$
$$x = c_1 b_2 - c_2 b_1 / a_1 b_2 - a_2 b_1$$

لكن $a_1 b_2 - a_2 b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \Delta$

ويمثل محدد مصفوفة معاملات المتغيرين x , y في المعادلتين . وكذلك

$$c_1 b_2 - c_2 b_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = \Delta x$$

ويمثل محدد مصفوفة المعاملات المطلقة (الطرف الايسر) ومعاملات المتغير y في المعادلتين . لذلك :

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

وبنفس الطريقة السابقة يمكن ان ضرب المعادلة الاولى بالمعامل a_2 والمعادلة الثانية بالمعامل a_1 ونكمل الحل بالطرح نحصل على :

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

ويسمى $\Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$

$\therefore y = \dfrac{\Delta y}{\Delta}$

(وتسمى هذه الطريقة بطريقة كرامر)

نلاحظ قبل تطبيق القانون يجب ان تكون المعادلتين مرتبتين بحيث الحدود التي المتغيرين x , y في الطرف الايمن والمتشابهة احدهما تحت الاخر والعدد الخالي من المتغيرين (العدد المطلق) في الطرف الايسر.

مثال 15

جد مجموعة حل المعادلتين الآنيتين بطريقة المحددات (كرامر)

$5x - 2y - 11 = 0 \quad , \quad 2x + 3y = 12$

الحل

نرتب المعادلتين اولاً وكما يلي:

$5x - 2y = 11$

$2x + 3y = 12$

نجد

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5 \times 3 - (-2) \times 2 = 15 + 4 = 19$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & -2 \\ 12 & 3 \end{vmatrix} = 11 \times 3 - (-2) \times 12 = 33 + 24 = 57$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 11 \\ 2 & 12 \end{vmatrix} = 5 \times 12 - 11 \times 2 = 60 - 22 = 38$$

$$\therefore x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{57}{19} = 3$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{38}{19} = 2$$

$S = \{(3, 2)\}$

مثال 16

جد قيمتي x , y التي تحقق حل المعادلتين الآنيتين :

$$3x + 5y = -1$$
$$x + 2y = 0$$

الحل نلاحظ ان المعادلتين مرتبتين :

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-1 \times 2 - 5 \times 0}{3 \times 2 - 5 \times 1} = \frac{-2-0}{6-5} = \frac{-2}{1} = -2$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{3 \times 0 - (-1) \times 1}{1} = \frac{0+1}{1} = 1$$

$$\therefore \; x = -2 \;, \; y = 1$$

مثال 17

حل المعادلتين الآتيتين آنياً :

$$5x - 2y - 3 = 0 \quad , \quad y - 3 = x$$

الحل نرتب المعادلتين

$$5x - 2y = 3$$
$$-x + y = 3$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{3+6}{5-2} = \frac{9}{3} = 3$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}}{5 - 2} = \frac{15 - (-3)}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

$$\therefore \; x = 3 \;, \; y = 6 \qquad S = \{(3,6)\}$$

مثال 18

حل المعادلتين آنياً بطريقة كرامر :

$$2x + 5y = 12 \quad , \quad 4x + 3y = 10$$

الحل نلاحظ ان المعادلتين مرتبتين ، نجد :

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 5 \\ 10 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{12 \times 3 - 5 \times 10}{2 \times 3 - 5 \times 4} = \frac{36 - 50}{6 - 20} = \frac{-14}{-14} = 1$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 12 \\ 4 & 10 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{2 \times 10 - 12 \times 4}{-14} = \frac{20 - 48}{-14} = \frac{-28}{-14} = 2$$

$$\therefore \quad x = 1 \ , \ y = 2 \qquad S = \{ (1, 2) \}$$

[3 – 11] محددات المصفوفة المربعة 3x3

يمكن ايضاً ايجاد محدد المصفوفة المربعة 3x3 وبالشكل :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

والتي هي :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

مثال 19

جد قيمة

$$\begin{vmatrix} -2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 0 \end{vmatrix}$$

الحل

$$\begin{vmatrix} -2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 0 \end{vmatrix} = (-2) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= -2[1 \times 0 - 2 \times (-3)] - 5 \times [3 \times 0 - 2 \times 4] + 4 \times [3 \times (-3) - 1 \times 4]$$

$$= -2[0 + 6] - 5[0 - 8] + 4[-9 - 4]$$

$$= -12 + 40 - 52 = -24$$

توجد طريقة أخرى لايجاد محدد المصفوفة 3×3 وكما يلي :

1 / نكرر كتابة العمودين الاول والثاني

$$\left|\begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{array}\right| \begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{array}$$

يفضل الاسهم كل اتجاه بلون لتميز القطر الرئيسي عن القطر المعاكس.

$$\left|\begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{array}\right| \begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{array}$$

2 / نجد حاصل ضرب عناصر الاقطار الرئيسية الثلاث والتي هي : $a_1\ b_2\ c_3\ ,\ b_1\ c_2\ a_3\ ,\ c_1\ a_2\ b_3$

3 / نجد H_1 الذي يمثل مجموع النواتج الثلاث :

$$H_1 = a_1\ b_2\ c_3 + b_1\ c_2\ a_3 + c_1\ a_2\ b_3$$

4 / نجد حاصل ضرب عناصر الاقطار المعاكسة الثلاث والتي هي :

$$c_1\ b_2\ a_3\ ,\ a_1\ c_2\ b_3\ ,\ b_1\ a_2\ c_3$$

5 / نجد H_2 ويمثل مجموع النواتج الثلاث :

$$H_2 = c_1\ b_2\ a_3 + a_1\ c_2\ b_3 + b_1\ a_2\ c_3$$

واخيراً :

$$\left|\begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{array}\right| = H_1 - H_2$$

سنحل المثال السابق بالطريقة الثانية :

$$\left|\begin{array}{ccc} -2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 0 \end{array}\right| \begin{array}{cc} -2 & 5 \\ 3 & 1 \\ 4 & -3 \end{array}$$

نجد H_1 حيث :

$$H_1 = [(-2 \times 1 \times 0) + (5 \times 2 \times 4) + (4 \times 3 \times (-3))]$$
$$= 0 + 40 - 36 = 4$$

$$H_2 = [(4 \times 1 \times 4) + ((-2) \times 2 \times (-3)) + (5 \times 3 \times 0)]$$
$$= 16 + 12 + 0 = 28$$

$$\therefore \quad \begin{vmatrix} -2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 0 \end{vmatrix} = H_1 - H_2 = 4 - 28 = -24$$

ملاحظة

سوف نعتمد في ايجاد قيمة محدد المصفوفة 3×3 على الطريقة الثانية

مثال 20

جد قيمة :

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 6 & 4 & -8 \\ -5 & 2 & 8 \end{vmatrix}$$

الحل

$$\left|\begin{matrix} 3 & -2 & 4 \\ 6 & 4 & -8 \\ -5 & 2 & 8 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 3 & -2 \\ 6 & 4 \\ -5 & 2 \end{matrix}$$

$$H_1 = [(3 \times 4 \times 8) + ((-2) \times (-8) \times (-5)) + (4 \times 6 \times 2)]$$
$$= 96 - 80 + 48 = 64$$

$$H_2 = [(4 \times 4 \times (-5)) + (3 \times (-8) \times 2) + ((-2) \times 6 \times 8)]$$
$$= -80 - 48 - 96 = -224$$

$$\therefore \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 6 & 4 & -8 \\ -5 & 2 & 8 \end{vmatrix} = H_1 - H_2 = 64 - (-224) = 288$$

مثال 21

جد قيمة

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

الحل

$$\left|\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \\ 3 & 2 \end{matrix}$$

نجد $H_1 = (1 \times (-3) \times 5) + (2 \times 0 \times 3) + (3 \times (-2) \times 2)$

$= -15 + 0 - 12 = -27$

$H_2 = (3 \times (-3) \times 3) + (1 \times 0 \times 2) + (2 \times (-2) \times 5)$

$= -27 + 0 - 20 = -47$

$$\therefore \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = H_1 - H_2 = (-27) - (-47) = -27 + 47 = 20$$

[12 – 3] استخدام المحددات في حل ثلاث معادلات آنياً من الدرجة الاولى بثلاث متغيرات وتسمى طريقة كرامر

تعلمنا سابقاً حل معادلتين آنياً وبطريقة المحددات (كرامر) وفي موضوعنا هذا سنتعلم كيفية حل ثلاث معادلات من الدرجة الاولى وبثلاث متغيرات بأستخدام المحددات وكما يلي :

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = h_1$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = h_2$$
$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = h_3$$

يمكن بعد ضرب المعادلات بمعاملات عددية وبطريقة الحذف كما سبق في حل المعادلتين الآنيتين يمكن الحصول على القوانين الآتية لايجاد قيم x , y , z

هي محدد مصفوفة معاملات x , y , z في الطرف الايمن

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} h_1 & b_1 & c_1 \\ h_2 & b_2 & c_2 \\ h_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

Δx هي مشابه محدد Δ بحيث تحل المعاملات العددية في الطرف الايسر بدلاً من عمود معاملات x

Δy هي مشابه محدد Δ بحيث تحل المعاملات العددية في الطرف الايسر بدلاً من عمود معاملات y

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & h_1 & c_1 \\ a_2 & h_2 & c_2 \\ a_3 & h_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

Δz هي محدد المصفوفة التي تمثل مصفوفة Δ بحيث تحل المعاملات العددية في الطرف الايسر بدلاً من عمود معاملات z

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & h_1 \\ a_2 & b_2 & h_2 \\ a_3 & b_3 & h_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

ملاحظة

1- يجب ترتيب حدود المعاملات بحيث المعاملات العددية في الطرف الايسر والحدود التي تحتوي x ، y و z في الطرف الايمن ومرتبة بنفس الطريقة في المعاملات الثلاث .

2- إذا كانت قيمة Δ = صفر في حل معادلتين آنياً أو ثلاث معادلات فإن المعادلات ليس لها حل في R .

مثال 22

حل المعادلات الثلاث وبطريقة المحددات في كل مما يأتي :

1) $x + 4y + 3z = 1$

$2x + 5y + 4z = 4$

$x + 3y + 2z = 5$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} h_1 & b_1 & c_1 \\ h_2 & b_2 & c_2 \\ h_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 4 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 5 & 4 & 4 & 5 \\ 5 & -3 & -2 & 5 & -3 \end{array}\right|}{\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 4 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & -2 & 1 & -3 \end{array}\right|}$$

$$x=\frac{[-10+80-36]-[75+(-12)-32]}{[-10+16-18]-[15-12-16]}=\frac{34-31}{-12+13}=\frac{-3}{1}=-3$$

$$y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & h_1 & c_1 \\ a_2 & h_2 & c_2 \\ a_3 & h_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}=\frac{\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & -2 & 1 & 5 \end{array}\right.}{\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 4 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & -2 & 1 & -3 \end{array}\right.}$$

$$y=\frac{[-8+4+30]-[12+20-4]}{[-10+16-18]-[15-12-16]}=\frac{26-28}{-12+13}=\frac{-2}{1}=-2$$

$$z=\frac{\Delta z}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & h_1 \\ a_2 & b_2 & h_2 \\ a_3 & b_3 & h_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}=\frac{\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 4 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & 5 & 1 & -3 \end{array}\right.}{\Delta}$$

$$z=\frac{[25+16-6]-[5-12+40]}{1}=\frac{35-33}{1}=2$$

$x=3$, $y=-2$, $z=2$

2) $y - 2x + 3 = z \quad , \quad 3x - 4 = 2y - 2z \quad , \quad x + y + z = 9$

الحل نرتب المعادلات الثلاث وكالآتي :

$$\begin{aligned} -2x + y - z &= -3 \\ 3x - 2y + 2z &= 4 \\ x + y + z &= 9 \end{aligned}$$

اولاً نجد قيمة Δ حيث

$$\Delta = \left|\begin{array}{ccc|cc} -2 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right.$$

$$\Delta = [\,4 + 2 + (-3)\,] - [\,2 + (-4) + 3\,] = 3 - 1 = 2$$

$$\therefore x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} h_1 & b_1 & c_1 \\ h_2 & b_2 & c_2 \\ h_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{2} = \frac{\left|\begin{array}{ccc|cc} -3 & 1 & -1 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 2 & 4 & -2 \\ 9 & 1 & 1 & 9 & 1 \end{array}\right.}{2}$$

$$\therefore x = \frac{[\,6 + 18 + (-4)\,] - [\,18 + (-6) + 4\,]}{2} = \frac{20 - 16}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & h_1 & c_1 \\ a_2 & h_2 & c_2 \\ a_3 & h_3 & c_3 \end{vmatrix}}{2} = \frac{\left|\begin{array}{ccc|cc} -2 & -3 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & 4 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 9 & 1 & 1 & 9 \end{array}\right.}{2}$$

$$y = \frac{[\,-8 + (-6) + (-27)\,] - [\,(-4) + (-36) + (-9)\,]}{2} = \frac{-41 + 49}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & h_1 \\ a_2 & b_2 & h_2 \\ a_3 & b_3 & h_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{\left|\begin{array}{ccc|cc} -2 & 1 & -3 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 4 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 9 & 1 & 1 \end{array}\right.}{2}$$

$$z = \frac{[36 + 4 + (-9)] - [6 + (-8) + 27]}{2} = \frac{31 - 25}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\therefore\ x = 2 \quad , \quad y = 4 \quad , \quad z = 3$$

3) $2x - 4y + 5z = 5 \quad , \quad x + 3y - 2z + 10 = 0 \quad , \quad -3x - 2y - 4z + 6 = 0$

الحل

نرتب المعادلات أولاً وكما يلي :

$$\begin{aligned} 2x - 4y + 5z &= 5 \\ x + 3y - 2z &= -10 \\ -3x - 2y - 4z &= -6 \end{aligned}$$

نجد

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & -4 & 5 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & -2 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & -4 & -3 & -2 \end{array}\right.$$

$$\Delta = [-24 + (-24) + (-10)] - [-45 + 8 + 16] = [-58] - [-21] = -37$$

ثم نجد كلاً من x و y و z وكما يلي:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -4 & 5 \\ -10 & 3 & -2 \\ -6 & -2 & -4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 5 & -4 \\ -10 & 3 \\ -6 & -2 \end{matrix}}{-37}$$

$$x = \frac{[-60+(-48)+100] - [-90+20+(-160)]}{-37} = \frac{[-8]-[-230]}{-37} = \frac{222}{-37} = -6$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 1 & -10 & -2 \\ -3 & -6 & -4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 5 \\ 1 & -10 \\ -3 & -6 \end{matrix}}{-37} = \frac{[80+30+(-30)]-[150+24+(-20)]}{-37}$$

$$y = \frac{80-154}{-37} = \frac{-74}{-37} = 2$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 1 & 3 & -10 \\ -3 & -2 & -6 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \\ -3 & -2 \end{matrix}}{-37} = \frac{[-36+(-120)+(-10)]-[-45+40+24]}{-37}$$

$$z = \frac{-166-19}{-37} = \frac{-185}{-37} = 5$$

$\therefore x = -6 \;,\; y = 2 \;,\; z = 5$

تمارين [1 – 3]

س1 : جد قيمة كل مما يأتي وبين اي منها هو محدد لمصفوفة منفردة :

1) $\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & -\cos x \end{vmatrix}$

2) $\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 5 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$

3) $\begin{vmatrix} 2\sqrt{2} & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{vmatrix}$

4) $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -6 & -8 \end{vmatrix}$

5) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

6) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

س2 : حل المعادلات الآتية وجد قيمة x في كل مما يأتي :

1) $\begin{vmatrix} 3x & 3 \\ 9 & 4x \end{vmatrix} = 0$

2) $\begin{vmatrix} x & x \\ x-1 & x-5 \end{vmatrix} = 8$

3) $\begin{vmatrix} x & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 6 \\ 5 & -1 & 8 \end{vmatrix} = 3$

س3 : حل المعادلتين الانيتين في كل مما يأتي وبطريقة كرامر :

1) $5x + 3 = 4y \quad , \quad 3x + y = 5$

2) $2x - 3 = 3y \quad , \quad x - 1 = 2y$

3) $4y + 2x = 0 \quad , \quad 3x + 5y = -1$

4) $2x + 3y = 6 \quad , \quad x + y = 1$

س4 : حل المعادلات الثلاث بايجاد قيم x , y , z وبطريقة المحددات في كا مما يأتي :

1) $3x + y - z = 2 \quad , \quad 2x + 3y + z = 11 \quad , \quad x - y + 3z = 8$

2) $4y + z = 0 \quad , \quad 2x + z = -8 \quad , \quad 5x + 6y = 2z + 4$

3) $x + 3y = 2z - 2 \quad , \quad 4x + 2y = z - 3 \quad , \quad 2x - y + z = 0$

4) $3x + y - z = -1 \quad , \quad 5x + 2y + z = 8 \quad , \quad x - 3y - 4z = -5$