جامعة المســــــــتقبل

كلية العلوم الإدارية

قسم إدارة الأعمال

مادة الرياضيات

2024-2023

تدريسي المادة الدكتور رياض مالك الحسني

[1-1] المجموعة

الهدف من الدرس

أن يكون الطالب قادراً على أن:
يُعرف المجموعة

المجموعة:

هي تجمع من الأشياء المعرفة والمحددة تحديداً تاماً ويربطهما رابط.

مثل مجموعة الأعداد الطبيعية ، مجموعة الأرقام الزوجية ، مجموعة الطلبة الذين يحفظون القرآن الكريم ...... إلخ

يتصف مفهوم المجموعة بالخواص التالية:

1) المجموعة كائن رياضي قائم بذاته، مفهومه يختلف عن مفهوم الأشياء التي تكونه.

2) المجموعة معينة تعيناً تاماً بحيث يمكننا القول بأن هذا الشيء من المجموعة أو غريب عنها . فمثلاً إن الطلاب المتفوقين في الأول متوسط لا يمثل مجموعة لأن وصف التفوق يختلف من شخص لآخر .

3) وضع فاصلة بين عناصر المجموعة.

4) لا يراعى الترتيب بين عناصر المجموعة.

5) لا يوجد تكرار لعناصر المجموعات.

لقد أصطلح على تسمية كل فرد من أفراد المجموعة ((بالعنصر))

رمز المجموعة

سوف نرمز للمجموعات بحروف كبيرة مثل **A , B , X , Y ,...**

ولعناصرها بحروف صغيرة مثل a , b , x , y , ...

فمثلاً المجموعة A مجموعة عناصرها a , b , c , d وتكتب بالشكل

$A = \{a , b , c , d\}$

فيمكن أن نبين أن a عنصر فِي A أو نقول $a \in A$

أنواع المجموعات

المجموعات المنتهية

هي المجموعة التي يمكن عد عناصرها.

فمثلاً مجموعة الأعداد الزوجية من 2 إلى 20 مجموعة منتهية وتكتب بالشكل

$$A=\{\ 2\ ,\ 4\ ,\ 6\ ,\ 8\ ,10\ ,\ 12\ ,\ 14\ ,\ 16\ ,\ 18\ ,\ 20\ \}$$

المجموعة غير المنتهية

هي المجموعة التي لا يمكن عد عناصرها.

فمثلاً مجموعة الأعداد الطبيعية N

$$N=\{\ 0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4\ ,\ 5\ ,\ 6\ ,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ \}$$

المجموعة الخالية

يقال للمجموعة التي لا تحتوي على أي عنصر بأنها (مجموعة خالية) ويرمز لها بالرمز { } أو $\varnothing$

فمثلاً إن مجموعة الأعداد الطبيعية السالبة = $\varnothing$

لأنه لا يوجد عدد طبيعي سالب (الأعداد الطبيعية كلها موجبة)

[1 – 2]تساوي مجموعتين

يقال للمجموعتين B , A بأنهما متساويتان إذا كان $B \subset A$ ، $A \subset B$

فإن $A = B$

مثال1

إذا كانت $A = \{ 1 , 3 , 5 \}$

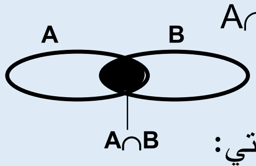
$B = \{ 3 , 1 , 5 \}$

فإن $A = B$

[1 – 3] تقاطع المجموعات رمزها $\cap$

الهدف من الدرس
أن يكون الطالب قادراً على أن:
يجد تقاطع مجموعتين

لتكن A , B مجموعتين ، فنقصد بتقاطعهما $A \cap B$ مجموعة العناصر التي تنتمي إلى كل من A , B



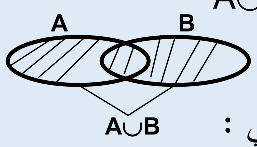
مجموعة تقاطع المجموعتين A ، B تكتب بالشكل الاتي:

$$A \cap B = \{ a : a \in A , a \in B \}$$

[1 – 4] اتّحاد المجموعات رمزها $\cup$

الهدف من الدرس
أن يكون الطالب قادراً على أن:
يجد اتحاد مجموعتين

لتكن A , B مجموعتين ، فنقصد باتحادهما $A \cup B$ مجموعة العناصر التي تنتمي إلى A أو B



مجموعة اتّحاد المجموعتين A ، B تكتب بالشكل الآتي :

$$A \cup B = \{ a : a \in A \text{ or } a \in B \}$$

مثال2

إذا كانت

$X=\{ 1 , 3 , 4 , 6 , 9 \}$

$y= \{ 2 , 3 , 6 , 11 , 13 \}$

جد $x\cap y$, $x\cup y$

الحل

$x\cap y = \{ 3 , 6 \}$

$x\cup y= \{ 1 , 2 , 3 , 4 , 6 , 9 ,11 , 13 \}$

مثال3

إذا كانت

$X=\{ 2 , 3 , 5 , 6 \}$

$y= \{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 \}$

$z= \{ 2 , 3 , 4 , 6 , 7 \}$

جد $x\cap y$, $x\cap z$, $x\cap y\cap z$

الحل

$x\cap y = \{ 2 , 3 , 5 \}$

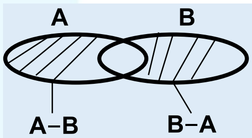
$x\cap z= \{ 2 , 3 , 6 \}$

$x\cap y\cap z= \{ 2 , 3 \}$

[1 – 5] الفرق بين مجموعتين

الهدف من الدرس
أن يكون الطالب قادراً على أن:
يجد الفرق بين مجموعتين

لتكن A , B مجموعتين ، فنقصد بالفرق بينهما A–B مجموعة العناصر التي تنتمي إلى A ولا تنتمي إلى B



$$A-B = \{ a : a\in A , a\notin B \}$$

مثال4

لتكن

$A= \{1 , 2 , 5 , 8 , 9 \}$

$B = \{ 2 , 8 \}$

جد $A-B$

الحل

$A-B =\{ 1 , 5 , 9 \}$

مثال5

لتكن

$A= \{1 , 2 , 6 , 8 , 11 \}$

$B = \{ a , c \}$

$C = \{ 4 , 6 , 9 , 11 \}$

جد 1) $A\cap B$ 2) $A\cup B$ 3) $A\cap C$ 4) $A-C$

الحل

1) $A\cap B = \varnothing$

2) $A\cup B = \{ 1 , 2 , 6 , 8 , 11 , a , c \}$

3) $A\cap C = \{ 6 , 11 \}$

4) $A - C = \{ 1 , 2 , 8 \}$

تمارين (١-١)

س1) إذا كان $C=\{6 , 7\}$, $B=\{1,3,5\}$, $A=\{2 , 4 , 6\}$

$D=\{5 , 6\}$ جد كلّاً ممّا يأتي:

1) $A\cup B$
2) $A\cup C$
3) $B\cup D$
4) $A\cap B$
5) $A\cap C$
7) $A\cup B\cup C\cup D$
9) $A\cap D\cap C$
10) $A-C$
11) $C-D$

س2)

إذا كانت A هي مجموعة مضاعفات العدد 3 الأقل من 20

B هي مجموعة مضاعفات العدد 2 الأقل من 20

فأوجد $A\cap B$

س3)

حدد المجموعات المنتهية وغير المنتهية لكلاً مما يأتي:

أ) مجموعة مضاعفات العدد (6)

ب) مجموعة المثلثات القائمة الزاوية

[1 - 6] العلاقات

الهدف من الدرس
أن يكون الطالب قادراً على أن:
يعرف العلاقة

العلاقة مجموعة من الأزواج المرتبة حيث ينتمي المسقط الأول من كل زوج منها إلى المجموعة X وينتمي المسقط الثاني إلى المجموعة y

أي إن العلاقة من المجموعة X إلى المجموعة y هي المجموعة الجزئية من الحاصل الديكارتي $Y \times X$ وهي علاقة من X إلى Y

مثال6

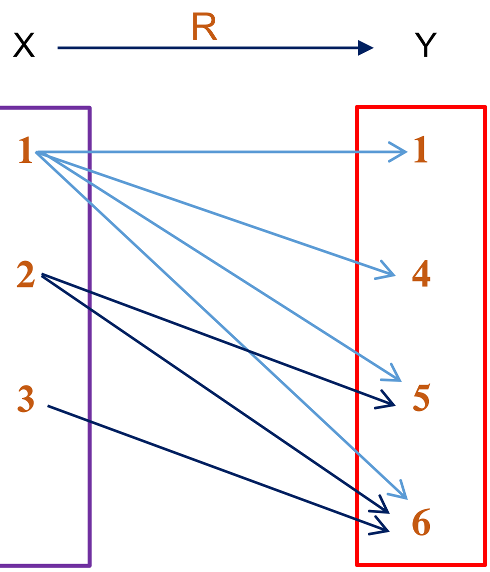
لتكن

$X = \{1, 2, 3\}$

$y = \{1, 4, 5, 6\}$

$R = \{(1,1), (1,4), (1,5), (1,6), (2,5), (2,6), (3,6)\}$

فإن R هي علاقة من X إلى y والمخطط السهمي يوضح ذلك:



مثال7

إذا كانت

$X= \{ 2 , 3 , 4 , 6 ,8 \}$

$Y= \{ 2 , 3 , 5 \}$

أوجد كلاً من العلاقات الآتية:

1) علاقة (أصغر من) من X إلى X

2) علاقة (تساوي) من Y إلى Y

3) علاقة (ضعف) من X إلى Y

4) علاقة (نصف) من Y إلى X

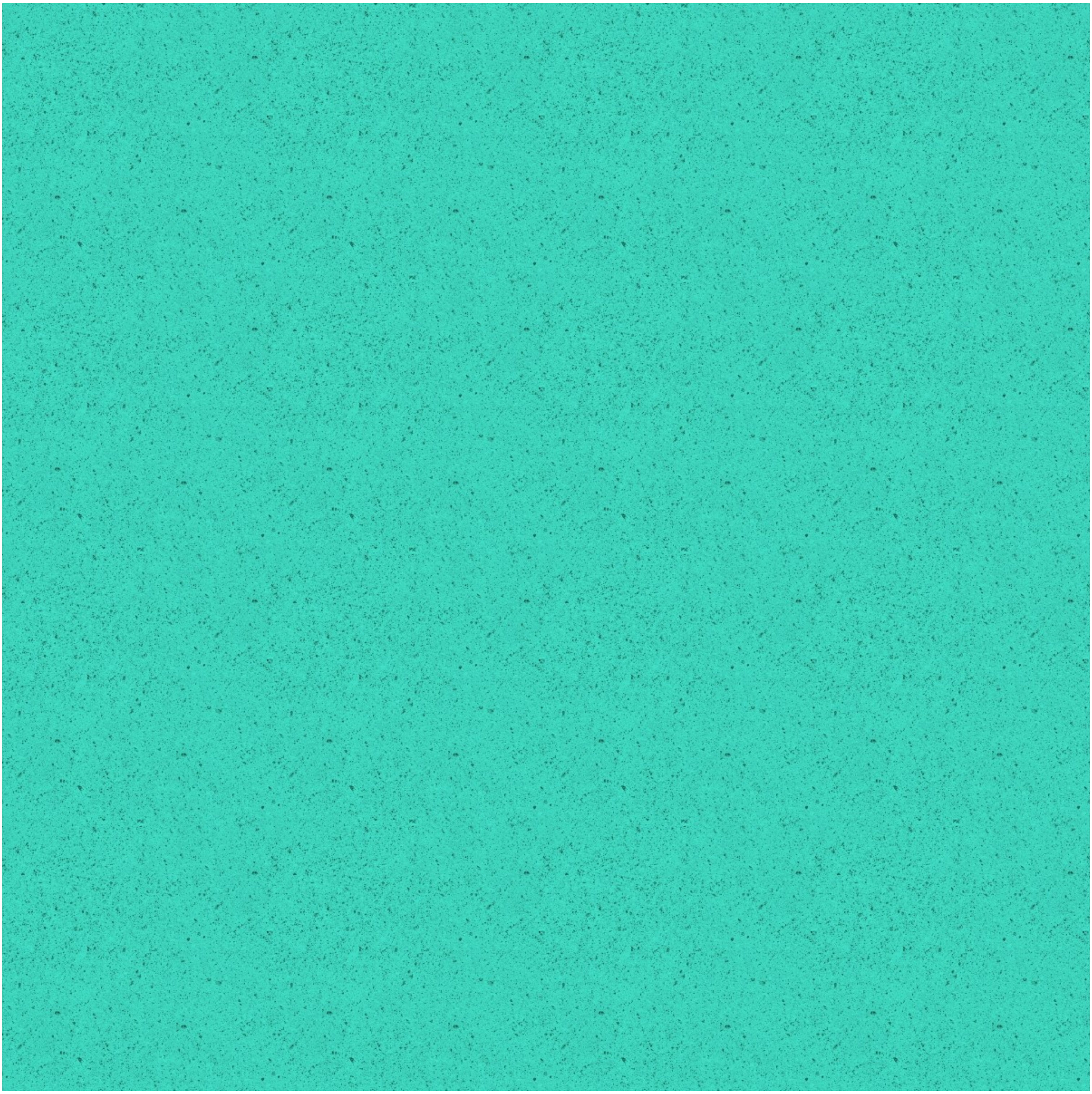
الحل

1) $R_1 = \{ (2 ,3) , (2, 4) , (2,6),(2, 8), (3,4) , (3,6),(3, 8) , (4,6) , (4,8) , (6,8) \}$

2) $R_2 = \{(2 , 2) , (3 , 3) , (5 , 5) \}$

3) $R_3 = \{ (4 , 2) , (6 , 3) \}$

4) $R_3 = \{ (2 , 4) , (3 , 6) \}$



الدّرسُ الأوَّل: التّراكيبُ الجبريّة

نستخدمُ التّراكيبَ الجبريّةَ في الكثيرِ من المواقفِ في حياتنا اليوميّةِ كما يمكنُ في الرّياضيّاتِ التّعبيرُ بالرّموزِ عن أشياءَ أو أعداد أو في بعضِ المسائلِ لتبسيطِ حلِّها.

مثال$_1$: نُلاحِظُ معنى العبارة التّالية:

نصف العدد 200 هو قسمة العدد 200 على العدد 2.

بشكل عامّ لحساب نصف أيّ عدد مثل x (هو قسمة العدد x على العدد 2): $\frac{x}{2}$

مثال$_2$: نلاحِظُ معنى العِبارَة التّالية:

ضِعفا العدد 24 هو ضربُ العددِ 24 بالعددِ 2.

بشكلٍ عامّ لحسابِ ضعفَي أيّ عددٍ مثل y (هو ضربُ العددِ y بالعددِ 2): $2y$

مثال$_3$: نلاحِظُ معنى العِبارَة التّالية:

ربعُ العددِ 400 مضافاً إليه 3 هو قسمةُ العددِ 400 على 4، ثمَّ جمعُ النّاتِجِ مع 3.

بشكلٍ عامّ لحسابِ ربعِ أيّ عددٍ مثل t مضافاً إليه a (هو قسمةُ العددِ tعلى 4 ثمَّ جمعُ النّاتِجِ مع a) : $\frac{t}{4}+a$.

التّراكيبُ الجبريّة:

التّراكيبُ الجبريّة: هي كلُّ عبارَةٍ تحوي أعداداً ورموزاً.

مثال: ألاحِظُ العبارات التّالية:

a) $2 \times x + 1$ عبارة جبريّة

b) $\frac{1}{3}y - 7$ عبارة جبريّة

c) $\frac{Z}{3} - 2$ عبارة جبريّة

- ### القيمة العدديّة للتّراكيب الجبريّة:

نحصلُ على القيمةِ العدديّةِ بعد أن نعوّضَ العددَ بالرّمزِ، ثمَّ نحسبُ النّاتج.

مثال: قسّمَ أحمد قالبَ الحلوى إلى عدّة قطع، ثمَّ أكلَ منها (3) قطع.

ـ نكتبُ العبارةَ الجبريّةَ المعبِّرةَ عن القطعِ المتبقّية.

ـ نحسبُ القيمةَ العدديّةَ للعبارة السّابقة عندما تكون قيمة الرّمز(8).

1ـ نرمزُ لعددِ قطعِ الحلوَى الكُلّي بالرمزِ x.

2ـ عددُ القطعِ التي أكلَها أحمد (3).

3ـ العمليّة الحسابيّة هي: الطّرح.

العبارة الجبريّة: $x - 3$:

لحسابِ القيمةِ العدديّة عندما يكون الرّمزُ (8) نعوّضَ الرّمزَ x بالعددِ (8)فنجد:

$x - 3 = 8 - 3 = 5$ قطع متبقّية

تمرين: حقيبةٌ تحوي عدداً من عُلبِ أقلامِ التّلوينِ وكلّ علبةٍ تحوي (6)أقلام.

ـ نكتبُ العبارةَ الجبريّةَ المعبّرة عن عددِ أقلامِ التّلوينِ في الحقيبة.

ـ نحسبُ القيمةَ العدديّةَ للعبارة السّابقة عندما تكون قيمة الرّمز (4).

نرمزُ لعددِ العُلبِ الكلّيّ: ....

عددُ الأقلامِ في كلّ علبة: ....

العمليّةُ الحسابيّةُ هي: ....

العبارةُ الجبريّة: ....

حسابُ القيمةِ العدديّة عندما الرّمز يساوي 4: ....

• الحدُّ الجبريُّ:

الحدُّ الجبريُّ: هو تركيبٌ جبريٌّ يتكوَّنُ من ضربِ أعدادٍ ورموز.

مثال: نلاحظ الحدودَ الجبريّةَ التّاليةَ:

$2 \times x$ حدّ جبريّ

5 حدّ جبريّ

$5 \times x^0 = 5 \times 1 = 5$

$3 \times x \times y$ حدّ جبريّ

$1 \times x$ حدّ جبريّ

بما أنّ $1 \times x = x$
لا داعي لكتابة (1) أمام x

بشكلٍ عامّ: كلُّ حدٍّ جبريّ يتكوّن من قسمين:

1- قسمٌ عدديّ يُدعَى الأمثال.

2- قسمٌ حرفيّ يُدعَى الرّمز (المجهول).

مثال$_1$: نلاحظ الحدّ الجبريّ التّالي:

قسم حرفيّ ⟵ $3 \times x$ ⟵ قسم عدديّ

مثال$_2$: نكتبُ أمثالَ الحدود الجبريّة التّالية:

$5 \times y^2$ حدّ جبريّ أمثاله (5).

x حدّ جبريّ أمثاله (1).

3 حدّ ثابت.

ملاحظة:

لا يُشترطُ كتابة إشارة الضّرب (×) في الحالات التّالية:

1– بينَ عددٍ ورمز:

مثال: $2 \times x$ تُكتبُ بالشّكل $2x$

2– بينَ رمزين:

مثال: $x \times y$ تُكتب بالشّكل xy

3– بينّ عددٍ وقوس:

مثال: $2 \times (x + y)$ تُكتب بالشّكل $2(x + y)$

4– بينَ رمزٍ وقوس:

مثال: $x \times (y + 1)$ تُكتب بالشّكل $x\,(y + 1)$

5– بينَ قوسين:

مثال: $(x + 1) \times (\,y - 2)$ تُكتب بالشّكل $(x + 1)(y - 2)$

تمرين: نملأُ فراغاتِ الجدولِ التّالي:

المتغيّر	الأمثال	الحدّ الجبريّ
....	....	$7x$
....	....	$\frac{1}{3}y$
....	....	x^2

الحدّان الجبريّان المتشابهان: هما حدّان لهما القسمُ الحرفيُّ نفسه ونفس الأسّ.

مثال: نلاحظ ُالحدودَ الجبريَّة التّالية:

$3x$, $5x$ هما حدّان مُتشابهان.

$4yx$, $-2xy$ هما حدّان مُتشابهان.

-2 , 5 حدّان مُتشابهان لأنّهما ثابتان.

$6x^2$, $2x$ حدّان غيرُ مُتشابهين لأنّ الأسّين مُختلفان.

$4y$, $4x$ حدّان غيرُ مُتشابهين لأنّ الرّمزين (القسم الحرفيّ) مختلفان.

الحدّان الجبريّان المُتعاكسان: هما حدّان مُتشابهان لكنّهما مُتعاكسان بالأمثال.

مثال: نلاحظ الحدَّ الجبريّ التّالي:

$2\,x$, -2 x حدّان جبريّان مُتعاكسان.

تدريبات

1ـ أكتبُ تركيباً جبريّاً يعبّر عن كلٍّ ممّا يأتي:

aـ ضعفي العدد x مطروحاً منه 1.

bـ ثلاثة أضعاف y مضافاً إليه 5.

cـ مربّع العدد z مضافاً إليه 3.

dـ ثلث العدد x مطروحاً منه 2.

eـ أقلّ من x بعدد واحد.

fـ يزيد على y بمقدار 9.

2ـ أحسبُ القيمةَ العدديّة للتّركيب الجبريّ $x^2 + 1$ عندما $x = 2$.

3ـ أملأ فراغات الجدول التّالي:

الحدّ الجبريّ	الأمثال	المتغيّر
$8x$	....	....
y	....	....
$-\frac{1}{2}z$	....	....

4ـ أصلُ بين الحدودِ المتشابهة:

$5x^2$	$3x$	$-2xy$	$y\frac{1}{3}$
$-2y$	$3yx$	$7x^2$	$-3x$

الدّرسُ الثّاني: العمليّات الحسابيّة على التّراكيبِ الجبريّة

أوّلاً- جمعُ وطرحُ الحدودِ الجبريّة:

عندَ جمعِ أو طرحِ الحدودِ الجبريّة نجمعُ أو نطرحُ الحدودَ المتشابهة فقط (نجمَع أو نطرَح الأمثال ونضع الرّمز نفسه)

مثال: نوجدُ ناتجَ العمليّات التّالية:

- $3x + 5x = (3 + 5)x = 8x$
- $-7x^2 + 2x^2 = (-7 + 2)\,x^2 = -5\,x^2$
- $9y - 2y = (9 - 2)\,y = 7y$
- $x + x = (1 + 1)\,x = 2x$
- $2\,x + 3\,x^2$
- $-3\,x + 7y$
- $5\,x + 3$

لا تُجمَع لأنّها حدودٌ غيرُ متشابهة

- $\frac{3}{2}x + \frac{1}{4}x = \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{4}\right)x$

$\times 2$

$$= \left(\frac{6}{4} + \frac{1}{4}\right)x$$

$$= \frac{7}{4}x$$

- $3.5y^2 - 0.9y^2 = (3.5 - 0.9)\,y^2 = 2.6\,y^2$

ملاحظة:

ناتجُ جمعِ الحدّين المتعاكسين صفر

مثال: $+7x - 7x = (+7 - 7)\,x$

$= 0 \times x$

$= 0$

- **لتبسيطِ التّركيب الجبريّ نجمعُ الحدودَ المتشابهة:**

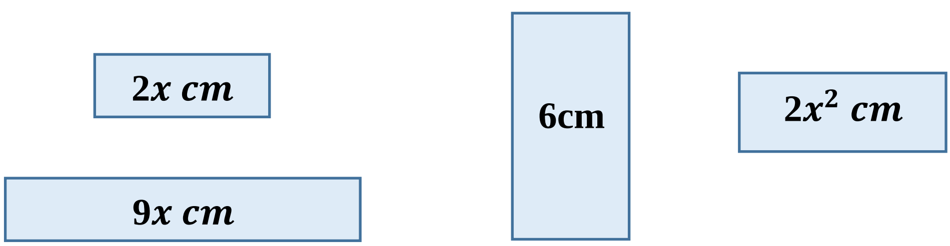
مثال$_1$: نبسّط التّركيبَ الجبريّ التّالي:

$$3x^2 - 2x + 5x^2 + 7 + 4x - 3 = (3x^2 + 5x^2) + (-2x + 4x) + (7 - 3)$$

$$= (3 + 5)\,x^2 + (-2 + 4)\,x + 4$$

$$= 8x^2 + 2x + 4$$

مثال$_2$: نكتُبُ التّركيبَ الجبريَّ المعبّر عن مجموعِ مساحاتِ المستطيلاتِ التّالية، ثمَّ نبسّط التّركيب:



مجموعُ مساحاتِ المستطيلاتِ هي:

$$= 2x^2 + 2x + 9x + 6$$

$$= 2x^2 + (2x + 9x) + 6$$

$$= 2x^2 + 11x + 6$$

ثانياً- ضرب الحدودِ الجبريّة:

1ـ ضربُ عددٍ بحدٍّ جبريّ: نضربُ العددَ بأمثالِ الحدِّ الجبريّ

مثال: نوجدُ ناتجَ ما يلي:

$$5\,(2x) = 10\,x$$

2ـ توزيع الضّرب على الجمع والطّرح:

$$a\,(x \mp b) = ax \mp ab$$

مثال1: نوجدُ ناتجَ ما يلي:

$$2\,(x+7) = 2 \times x + 2 \times 7$$
$$= 2x + 14$$

مثال2: نوجدُ ناتجَ ما يلي:

$$5\,(3a-1) = 5 \times 3a - 5 \times 1$$
$$= 15a - 5$$

3ـ ضربُ حدٍّ جبريٍّ بحدٍّ جبريٍّ آخر:

نضربُ الأمثالَ ببعضها ونضربُ الرّموزَ (المجهول أو القسم الحرفيّ) ببعضِها على أن نجمَعَ الأسُس عندما تكون الحدود متشابهة.

مثال: نوجدُ ناتجَ ما يلي:

- $2x \times 5x = (2 \times 5)\,(x \times x) = 10\,x^2$
- $-3y \times 7y^2 = (-3 \times 7)\,(y \times y^2) = -21\,y^3$
- $\frac{1}{2}\,x^2 \times \frac{3}{4}\,x = (\frac{1}{2} \times \frac{3}{4})\,(x^2 \times x) = \frac{3}{8}\,x^3$
- $3x \times 5y = (3 \times 5)\,(x \times y) = 15\,xy$

ملاحظة:

يمكن الاستفادة من الضّرب لتبسيطِ تركيبٍ جبريّ.

مثال$_1$: نكتبُ التّركيبَ الجبريَّ التّالي بأبسطَ شكل ممكن:

$$2x\,(3x-2)+8x=$$

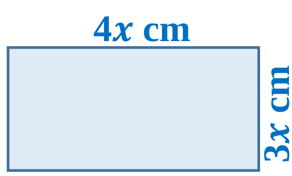
أوّلاً: نوزّعُ الضّربَ على الطّرح:

$$2x(3x-2)+8x=6\,x^2-4x+8x$$

ثانياً: نجمعُ الحدودَ المتشابهة:

$$2x\,(3x-2)+8x=6\,x^2-4x+8x$$
$$=6\,x^2+4x$$

مثال$_2$: نحسبُ مساحَةَ مستطيلٍ طولهُ $4x\ cm$ وعرضهُ $3x\ cm$



المساحة = الطّول × العرض

$$S=4x\times 3x$$
$$=12\,x^2\ \text{cm}^2$$

ثالثاً- قسمةُ الحدودِ الجبريّة:

نقسّمُ الأمثالَ على بعضها ونقسّم الرّموز (المجهول أو القسم الحرفيّ) على بعضها على أن نطرحَ الأُسس عندما تكون الحدود مُتَشَابِهَة.

مثال: نوجدُ ناتجَ ما يلي:

- $\frac{20\,x^3}{4x} = (\frac{20}{4})\,(\frac{x^3}{x}) = 5\,x^{3-1} = 5\,x^2$
- $\frac{-2\,x^6}{-5\,x^2} = (\frac{-2}{-5})\,(\frac{x^6}{x^2}) = \frac{2}{5}\,x^{6-2} = \frac{2}{5}\,x^4$
- $\frac{8x}{2x} = (\frac{8}{2})\,(\frac{x}{x}) = 4\,x^{1-1} = 4\,x^0 = 4 \times 1 = 4$
- $\frac{6xy}{2y} = \frac{6}{2}\,xy^{1-1} = 3\,xy^0 = 3x \times 1 = 3x$
- $\frac{12y}{4x} = (\frac{12}{4})\,\frac{y}{x} = 3\,\frac{y}{x}$
- $\frac{3x^2\,y}{9\,x} = \left(\frac{3}{9}\right) x^{2-1}y = \frac{1}{3}\,xy$

ناتجُ أيّ عدد مرفوع للأسّ (0) هو (1)

ملاحظة: يمكن أن نبسّط العمليّاتِ السّابقة بأن نختصرَ الحدودَ المتشابهة في البسط والمقام.

في هذه العمليّة $\frac{8x}{2x}$ نستطيعُ اختصارها بالشّكل: $\frac{8\cancel{x}}{2\cancel{x}} = 4$

- **قسمَةُ تركيبٍ جبريّ على حدٍّ جبريّ:**

نقسّم كلّ حدّ من حدود التّركيب الجبريّ على ذلك الحدّ الجبريّ.

مثال: نوجدُ ناتجَ ما يلي:

$$\frac{x^2-4x+8}{2x} = \frac{x^2}{2x} - \frac{4x}{2x} + \frac{8}{2x} = \frac{1}{2}\,x - 2 + \frac{4}{x}$$

تدريبات

1ـ أجِدُ ناتج العمليّات التّالية:

a) $-2x + 7x =$ … … … … … … …

b) $3x^2 + 2x^2 =$ … … … … … … …

c) $7.2\,y - 3.4\,y =$ … … … … … … …

d) $3\,x \times (-3\,x^5) =$ … … … … … … …

e) $-3\,y^6 \times \frac{1}{6}\,x =$ … … … … … … …

f) $\frac{1}{2}\,x^4 \times 2\,x^2 =$ … … … … … … …

g) $\frac{4\,x\,y^2}{2\,x\,y} =$ … … … … … … …

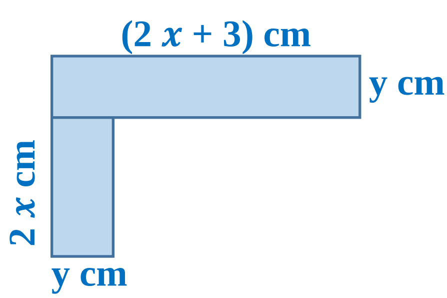
h) $\frac{3\,x^2\,y^4}{6\,x\,y^2} =$ … … … … … … …

i) $\frac{26\,x^2 + 14\,x^4}{2\,x} =$ … … … … … … …

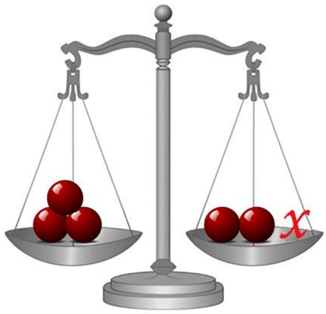
2ـ أكتبُ التّركيبَ التّالي بأبسط شكل:

$7\,x + 5 - 10\,x + x^2 + 9$

3ـ أحسبُ مساحَةَ الشّكل التّالي المكوّن من مستطيلين عندما $x = 2$ و $y = 1$.



الدّرسُ الثّالث: المُعادلات



العبارةُ الرّياضيّة:

$8 = 5 + 3$ عبارة رياضيّة صحيحة.

$2 = 5 + 3$ عبارة رياضيّة خاطئة.

$7 = 5 + x$ عبارة رياضيّة لا يمكن الحكمُ على أنّها صحيحة أو خاطئة نسمّيها مُعادلة.

المُعادلة: هي مساواة بين طرفين تحوي متغيّراً واحداً على الأقلّ.

مثال: $5 = 2 + x$ معادلة:

ندعو $x + 2$ بالطّرف الأوَّل (اليسار).

ندعو 5 بالطّرف الثّاني (اليمين).

ندعو x بالمتغيِّر (المجهول) وهو الرّمز الذي نريدُ معرفة قيمته.

تمرين: نحدّدُ فيما يلي إذا كانت العبارة هي مُعادلة أو ليست مُعادلة:

$x + 5$, $9 - 5 = 4$, $x + 7 = 8$

حلُّ المُعادلة:

حلَّ المُعادلة: هو إيجادُ قيمةِ المتغيّر والتي تجعلُ المساواة صحيحة.

مثال$_1$: إذا كان لدينا المُعادلة $x + 3 = 7$ فإنَّ حلّ هذهِ المُعادلةِ هوَّ $x = 4$

لأنَّ هذه القيمة تجعل المساواة صحيحة:

$$4 + 3 = 7 \Longrightarrow 7 = 7$$

بينما $x = 2$ ليس حلّاً للمُعادلة لأنَّ هذه القيمة تجعلُ المساواة غير صحيحة:

$$2 + 3 \neq 7 \Longrightarrow 5 \neq 7$$

مثال$_2$: نحلّ المُعادلة $x + 2 = 5$:

نسأل ما العدد الذي إذا أضفناه إلى 2 كان النّاتج 5؟

نجدُ $x = 3$ لأنَّ:

$$3 + 2 = 5 \Longrightarrow 5 = 5$$

$x = 3$ جعلت المساواة صحيحة

مثال$_3$: نحلّ المُعادَلَة "$2x = 8$"

نسأل ما العدد الذي إذا ضربناه بـ 2 كان النّاتج 8؟

نجدُ $x = 4$ لأنَّ:

$$2 \times 4 = 8 \Longrightarrow 8 = 8$$

$x = 4$ جعلت المساواة صحيحة

درجةُ المُعادلة:

درجةَ المُعادلة: هي أعلى أسّ للمتغيَّر (المجهول).

مثال: نكتبُ درجةَ المُعادلات التّالية:

$x + 1 = 3$ مُعادلةٌ بمجهولٍ واحد ومن الدّرجة الأولى.

$x^2 + 2x + 1 = 0$ مُعادلةٌ بمجهولٍ واحد ومن الدّرجة الثّانية.

$y + x = 7$ مُعادلة بمجهولَين ومن الدّرجة الأولى بالنّسبة لـ x و y.

ملاحظات:

1ـ سوفَ نقتصرُ في دراستنا هذا العام على المُعادَلة من الدّرجة الأولى وبمجهولٍ واحد.

2ـ يوجَدُ حلّ واحد للمُعادلة من الدّرجةِ الأولى وبمجهولٍ واحدٍ (قيمة واحدة للمتغيّر).

3ـ لكلّ مُعادلةٍ مجموعةُ تعويضٍ وهي مجموعةٌ من الأعدادِ نبحث ضمنها عن قيمةِ المجهولِ لكي تصبح المساواة صحيحة.

وفي حالةِ عدمِ ذكرِ مجموعةِ التّعويضِ نعتبرُها أوسعَ مجموعة أعدادٍ تمَّت دراستها.

مثال$_1$: نحلّ المُعادلة $x - 3 = 7$ في مجموعة التّعويض Z:

نبحثُ عن عددٍ لو طرحنا منه 3 كان النّاتج 7.

فنجدُ $Z \ni 10 = x$ لأنَّ $10 - 3 = 7 \Rightarrow 7 = 7$.

$x = 10$ حلّ هذه المُعادلة في Z.

مثال$_2$: نحلّ المُعادلة $x + 5 = 4$ في مجموعةِ التّعويض N:

نبحثُ عن عددٍ لو أضفناهُ إلى 5 كان النّاتج 4.

فنجدُ $x = -1 \notin N$.

هذه المُعادلة ليس لها حلّ في مجموعةِ الأعدادِ الطبيعيّة N.

التعبيرُ عن نصٍّ بمُعادلة:

ـ عددٌ إذا أُضيفَ إليه 7 كان النّاتج 13

نرمزُ للعددِ بـ x فيكون $x + 7 = 13$

ـ عددٌ إذا طُرِحَ منه 5 كان النّاتج 20

نرمزُ للعددِ بـ y فيكون $y - 5 = 20$

ـ ضعفا عددٍ إذا أضيفَ إليه 1 كان النّاتج 18

نرمزُ للعددِ بـ z فيكون $2z + 1 = 18$

ـ ضعفا عددٍ إذا طُرِحَ منه 6 كان النّاتج 12

نرمزُ للعددِ بـ t فيكون $2t - 6 = 12$

خواصّ المُعادلة:

1ـ إضافةُ أو طرحُ مقاديرَ متساوية من طرفَي المُعادَلة لا يؤثّر على صِحّة المُعَادلة.

إذا كانَ a, b, c أعدادٌ من Z وكان $a = b$ فإنّ:

$a - c = b - c$ و $a + c = b + c$

يمكن الاستفادة من هذه الخاصّة لحلّ مُعادَلة بمجهولٍ واحدٍ ومن الدّرجة الأولى.

مثال$_1$: نحلّ المُعادلة التّالية في N:

$$x + 3 = 9$$

$$x + 3 - 3 = 9 - 3 \Rightarrow x + 0 = 6$$

$$\Rightarrow x = 6 \in N$$

بما أنّ طرفَ المُعادلة الذي فيه المجهول يحوي العدد $(+3)$ لذلك نطرحُ (3) من طرفي المُعادلة.

مثال$_2$: نحلّ المُعادلة التّالية في Z:

$$x - 2 = 8$$

$$x - 2 + 2 = 8 + 2 \Rightarrow x + 0 = 10$$

$$\Rightarrow x = 10 \in Z$$

بما أنّ طرفَ المُعادَلة الذي فيه المجهول يحوي العدَد (-2) لذلك نضيفُ (2) إلى طرفي المُعادلة.

2ـ ضربُ أو قسمةُ طرفي المُعادلةِ على مقادير متساوية لا يؤثّر على صحّة المُعادلة.

إذا كان a، b، c أعداد من Z وكان $a = b$ فإنّ:

$\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$: $c \neq 0$ و $a \times c = b \times c$

يمكن الاستفادة من هذه الخاصّة لحلّ مُعادَلة بمجهولٍ واحد ومن الدّرجة الأولى.

مثال$_1$: نحلُّ المُعادلة التّالية:

$$\frac{x}{4} = 3$$

$$4 \times \frac{x}{4} = 4 \times 3 \Rightarrow 1 \times x = 12$$

$$\Rightarrow x = 12$$

بما أنّ طرفَ المُعادلة الذي فيه المجهول يحوي العدد (4) في المقام لذلك نضربُ طرفَي المُعادلة بـ (4).

مثال$_2$: نحلّ المُعادلة التّالية:

$$3\,x = 9$$

$$\frac{3\,x}{3} = \frac{9}{3} \Rightarrow 1 \times x = 3$$

$$\Rightarrow x = 3$$

بما أنّ طرفَ المُعادلة الذي فيه المجهول مضروبٌ بالعدد (3) لذلك نقسّم طرفي المُعادلة على (3).

حلّ أمثلة متنوّعة عن المُعادلات:

مثال$_1$: نحلُّ المُعادلة التّالية:

$$2\,x + 9 = -\,23$$

نطرح (9) من الطرفين (خاصّة الطّرح)

$$2\,x + 9 - 9 \;=\; -\,23 - 9$$

$$2\,x = -\,32$$

نقسّم الطّرفين على (2) (خاصّة القسمة)

$$\frac{2\,x}{2} = \frac{-\,32}{2} \quad \Longrightarrow \quad x = -\,16$$

مثال$_2$: نحلُّ المُعادلة التّالية:

$$5\,x + 2 = 10 - 3\,x$$

نضيفُ $3x$ (خاصّة الجمع):

$$5\,x + 2 + 3\,x = 10 - 3\,x + 3\,x$$

$$5\,x + 3\,x + 2 = 10$$

(الخاصّيّة التّبديليّة) ثمَّ نجمع الحدود المتشابهة:

$$8\,x + 2 = 10$$

نطرحُ (2) من الطّرفين (خاصّة الطّرح):

$$8\,x + 2 - 2 \;=\; 10 - 2$$

$$8\,x = 8$$

نقسّم الطّرفين على (8) (خاصّة القسمة):

$$\frac{8\,x}{8} = \frac{8}{8}$$

$$x = 1$$

مثال$_3$: نحلّ المُعادلة التّالية:

$$4\,(x + 2) = 2\,x - 1$$

(خاصّة التّوزيع) $4x + 8 = 2\,x - 1$

(خاصّة الطّرح) $4x + 8 - 2\,x = 2\,x - 1 - 2\,x$

نجمعُ الحدودَ المتشابهة

$$2x + 8 = -\,1$$

(خاصّة الطّرح) $2x + 8 - 8 \;=\; -\,1 - 8$

$$2x = -\,9$$

(خاصّة القسمة) $\frac{2\,x}{2} = \frac{-9}{2}$

$$x = \frac{-9}{2} \quad \Longrightarrow \quad x = -\,4{,}5$$

حلُّ المسائلِ باستخدامِ المُعادلات:

مثال: عددٌ إذا أضفناه إلى أربعةِ أضعافهِ كان النّاتج 50:

نرمزُ للعدد بـ x

فتصبحُ لدينا المُعادلةُ المعبّرةُ عن النَّصّ السّابق:

$$x + 4\,x = 50$$

نجمعُ الحدودَ المتشابهة

(خاصّة القسمة)$5\,x = 50$

$$\frac{5\,x}{5} = \frac{50}{5}$$

$x = 10$ وهو العدد المطلوب

التّأكّد من الحلّ: $10 + 4 \times 10 = 10 + 40$

$$= 50$$

نلاحظ أنَّ $x = 10$ هو العدد المطلوب.

تدريبات

1ـ أحدّدُ فيما يلي إذا كانت العبارةُ هي مُعادلة أو ليست مُعادلة:

$x + 6$, $8 - 1 = 7$, $x - 1 = 3$

2ـ أختارُ الإجابةَ الصّحيحةَ فيما يلي:

aـ حلُّ المُعادلة $3x - 1 = 2$ هو:

$x = 5$, $x = 3$, $x = 1$

bـ حلُّ المُعادلة $5x = 10$ هو:

$x = 4$, $x = 2$, $x = 1$

cـ حلُّ المُعادلة $3 + 2x = 7$

$x = 5$, $x = 1$, $x = 2$

3ـ أحلُّ المُعادلات التّالية:

$6x + 2 = 4$, $7x + 5 = 2$, $4 - 2x = 24$

$3(2x - 3) = 2x - 3$, $5x + 8 = 13 - 2x$

4ـ أحلُّ المسائلَ التّالية:

a. عددٌ إذا أضفناهُ إلى ضعفيه كان النّاتج 12

b. عدد إذا طرحنا منه خمسة أضعافِه كان النّاتجُ 20-

c. مستطيلٌ نصفُ محيطه 25 وطولُه يزيدُ على عرضِه بـ 3 أجِدُ طوله وعرضه.