نهايات السطوح

Max , min , saddle point

يمكن ان يكون للسطح نهاية عظمى max او صغرى min وفي حالات معينة نقطة تسمى saddle point عندها يكون هناك نهاية عظمى باتجاه معين وصغرى باتجاه اخر .

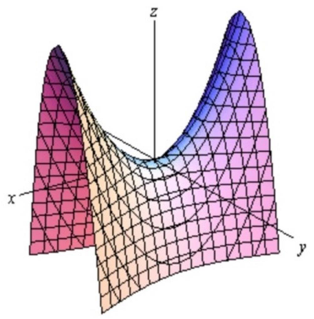
يكون للسطح نهاية عظمى max اذا كان محدبا اي كانت المشتقة الثانية سالبة عند النقطة لكلا المحورين المتعامدين x و y .

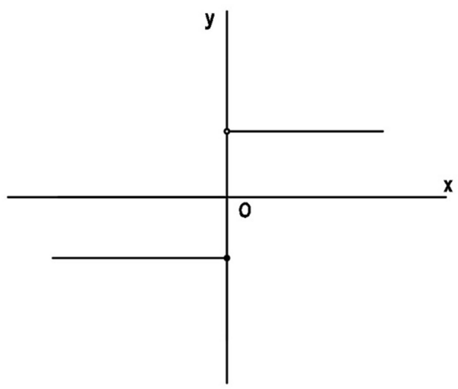
يكون للسطح نهاية صغرى min اذا كان مقعرا اي كانت المشتقة الثانية موجبة عند النقطة لكلا المحورين المتعامدين x و y .

يكون للسطح نقطة سرج saddle point اذا كان مقعرا على محور ومحدبا على محور اخر اي كانت المشتقة الثانية موجبة على محور وسالبة على اخر عند النقطة .

ملاحظة :

هناك حالات في الرياضيات تتكون فيها ثنائيات عند نقطة معينة مثلا الدالة في الشكل (1) وهي في المستوي xy لها نهاية من اليمين عند $x = 0$ تختلف عن النهاية من اليسار . هنا نقول ليس هناك نهاية اصلا عند $x = 0$. وحالة السرج لها نفس المفهوم اي ان السطح ليس له نهاية عند النقطة كما في الشكل نفسه .





الشكل(1) : حالة عدم وجود نهاية للدالة وللسطح

مثال حول النهاية الصغرى للسطح min

لدينا السطح التالي :

$$z = x^2 + y^2 + 3$$

نوجد المشتقة الجزئية على x ونساويها بالصفر فنحصل على المعادلة (1)

$$f_x = \frac{\partial z}{\partial x} = 2x = 0 \ldots\ldots\ldots x = 0 \ldots\ldots\ldots (1)$$

ثم نوجد المشتقة الجزئية على y ونساويها بالصفر فنحصل على المعادلة (2)

$$f_y = \frac{\partial z}{\partial y} = 2y = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots y = 0 \ldots\ldots\ldots (2)$$

The point under study is : (0,0,3)

نوجد المشتقة الجزئية الثانية على x ثم على y :

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 > 0$$

$$f_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 > 0$$

كلتاهما موجبتان مما يعني تقعر السطح اي وجود نهاية صغرى اذا لم تكن النقطة هي نقطة سرج.

نوجد المشتقة الجزئية المختلطة ***mixed*** على x و y :

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0$$

وهي نفسها :

$$f_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$$

ثم نطبق متباينة الفحص لبيان وجود نقطة سرج من عدمه :

There is a saddle point if : $f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2 < 0$

Now : $2\,(2) - (0)^2 = 4 > 0$

Hence , there is no saddle point and p(0,0,3) is minima