4.4 Euler's Equation

تستخدم هذه الطريقة لحل المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية او الرتب الأعلى وعندما يكون المضروب في المشتقة هو متغير وليس ثابت، ولكن لاستخدام هذه الطريقة يجب ان تكون درجة اس المتغير المضروب $(\boldsymbol{x})$ مساوي لرتبة المشتقة المضروب بها $(\boldsymbol{y})$.

General form:

$$\boldsymbol{a_o\, x^n\, y^n + a_1\, x^{n-1}\, y^{n-1} + \ \dots\dots\dots + a_{n-1}\, x\, \acute{y} + a_n\ \ y = R(x)}$$

For example:

$$a_o\, x^3\, \frac{d^3y}{dx^3} + a_1\, x^2\, \frac{d^2y}{dx^2} + a_2\, x\, \frac{dy}{dx} + a_3 y = R(x) \dots\dots\dots\dots\dots\dots (1)\ \ 3^{th}\ \ order$$

نحول هذه المعادلة الى معادلة ذات معاملات ثابتة بدلالة متغير وسطي نفرضه (t) للتخلص من ال (x) المرافق لل(y) ومشتقاته عن طريق هذه الفرضية:

$$let\ \ \ \boldsymbol{t = \ln x} \quad\ (i.e.\ \boldsymbol{x = e^t})$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} \qquad \rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{x} \qquad (\text{Chain Rules})$$

$$\boldsymbol{x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{dt}{dx} \qquad \rightarrow \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$$

$$\boldsymbol{x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^3y}{dt^3}\cdot\frac{dt}{dx} - \frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{dt}{dx}\right) + \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)\frac{-2}{x^3} \qquad \rightarrow$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^3y}{dt^3}\cdot\frac{1}{x} - \frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{1}{x}\right) - \frac{2}{x^3}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{x^3}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right)$$

$$\boldsymbol{x^3\frac{d^3y}{dx^3} = \left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right)}$$

Substitute $x\frac{dy}{dx}, x^2\frac{d^2y}{dx^2}, x^3\frac{d^3y}{dx^3}$ in equation (1):

$$a_o\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right) + a_1\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) + a_2\frac{dy}{dt} + a_3y = R(t)$$

$$a_o\frac{d^3y}{dt^3} + (a_1 - 3a_o)\frac{d^2y}{dt^2} + (2a_o - a_1 + a_2)\frac{dy}{dt} + a_3y = R(t)$$

تحل هذه المعادلة بنفس أسلوب حل المعادلة التفاضلية بالمعاملات الثابتة، فحلها تتكون من جزئيين (حل معادلة المتجانسة(y_c)) و(حل معادلة الغير متجانسة (Y)) ولكن بدلالة المتغير (t). وبعد الوصول لحلول المعادلة نحولها مرة أخرى بدلالة ال(x) من خلال الفرضية: $t = ln\, x$.

Example (1): Find the general solution of the differential equation:

$$\boldsymbol{x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} + y = 2x}$$

Solve:

Solve by Euler's Equation

$let\quad t = \ln x \quad (i.e{:}\ x = e^t)$

$$x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}$$

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$$

Substitute $x\frac{dy}{dx},\ x^2\frac{d^2y}{dx^2},\ x$ in above differential equation:

$$\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) + 3\frac{dy}{dt} + y = 2e^t$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y = 2e^t$$

$$m^2 + 2m + 1 = 0$$

$$m_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$m_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times 1}}{2 \times 1} = -1 \quad \rightarrow \quad \therefore m_1 = m_2 = m = -1$$

$$y_c = c_1\, e^{mt} + c_2\, te^{mt}$$

$$y_c = c_1\, e^{-t} + c_2 t\, e^{-t}$$

$$Let\;\; Y = A\, e^t, \quad \acute{Y} = A\, e^t, \quad \acute{\acute{Y}} = A\, e^t$$

$$A\, e^t + 2A\, e^t + A\, e^t = 2\, e^t$$

$$4A\, e^t = 2e^t \quad \rightarrow \quad A = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad Y = \frac{1}{2}\, e^t$$

$$\therefore y = c_1\, e^{-t} + c_2 t\, e^{-t} + \frac{1}{2}\, e^t$$

$$but\!: \; t = \ln x$$

$$y = c_1\, e^{-\ln x} + c_2 \ln x\;\, e^{-\ln x} + \frac{1}{2}\, e^{\ln x}$$

$\therefore$ The general solution: $\quad y = c_1 \dfrac{1}{x} + c_2 \dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{1}{2}\, x$

Example (2): Find the general solution of the differential equation:

$$\boldsymbol{x^3 \acute{\acute{\acute{y}}} + 4x^2 \acute{\acute{y}} - 5x\, \acute{y} - 15y = 0}$$

Solve:

Solve by Euler's Equation

$$let \;\; t = \ln x \quad (i.e\!: \; x = e^t)$$

$$x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}$$

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$$

$$x^3 \frac{d^3y}{dx^3} = \left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right)$$

Substitute $x\dfrac{dy}{dx}, x\dfrac{d^2y}{dx^2}, x\dfrac{d^3y}{dx^3}$ in above equation:

$$\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right) + 4\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) - 5\frac{dy}{dt} - 15y = 0$$

$$\frac{d^3y}{dt^3} + \frac{d^2y}{dt^2} - 7\frac{dy}{dt} - 15y = 0$$

$$m^3 + m^2 - 7\,m - 15 = 0$$

$let\ m = 1 \quad \rightarrow \quad 1 + 1 - 7 - 15 = -20 \neq 0 \qquad \therefore\ not\ ok$

$let\ m = 2 \quad \rightarrow \quad 8 + 4 - 14 - 15 = -17 \neq 0 \qquad \therefore\ not\ ok$

$let\ m = 3 \quad \rightarrow \quad 27 + 9 - 21 - 15 = 0 \qquad \therefore\ ok$

$$(m - 3)(m^2 + 4\,m + 5) = 0$$

$$\begin{array}{r|l} & m^2 + 4\,m + 5 \\ \hline \boxed{m - 3} & \boxed{m^3 + m^2 - 7\,m - 15} \\ & m^3 - 3m^2 \\ \hline & 4m^2 - 7\,m \\ & 4m^2 - 12\,m \\ \hline & 5\,m - 15 \\ & 5\,m - 15 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$m - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad m_1 = 3$

$m^2 + 4\,m + 5 = 0 \quad \rightarrow$

$$m_{2,3} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$m_{2,3} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} = -2 \pm i$$

$$y = c_1\, e^{mt} + e^{Pt}(c_2 \cos qt + c_3 \sin qt)$$

$$y = c_1\, e^{3t} + e^{-2t}(c_2 \cos t + c_3 \sin t)$$

$but:\ t = \ln x$

$$y = c_1\, e^{3\ln x} + e^{-2\ln x}(c_2 \cos(\ln x) + c_3 \sin(\ln x))$$

$\therefore$ The general solution: $\quad y = c_1\, x^3 + \dfrac{1}{x^2}(c_2 \cos(\ln x) + c_3 \sin(\ln x))$

H.W: Find the general solution of the differential equation:

1) $\mathbf{2x^2\, y'' + 5x\, y' + y = 3x + 2}$

Ans: $y = c_1\,\dfrac{1}{\sqrt{x}} + c_2\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2}\,x + 2$

2) $\mathbf{x^3\, y'' + x^2\, y' - x\,y = 3x^3}$

Ans: $y = c_1\, x + c_2\dfrac{1}{x} + x^2$