البرمجة الخطية

Linear Programming

البرمجة الخطية تعد أسلوبا من الأساليب الكمية، فهي أسلوب تحليلي كمي يتم استخدامه لمساعدة متخذ القرار في تحقيق هدف محدد تعظيم أو تقليل أحد المتغيرات التابعة بإدخال جملة من المتغيرات المستقلة التي تشكل مجموعة من القيود. وتهدف البرمجة الخطية إلى تحليل البدائل المختلفة، لاختيار أفضلها من وجهة نظر المشروع، وذلك على ضوء الهدف المرغوب في تحقيقه مع ألاخذ في الاعتبار القيود المفروضة على المشروع.

عناصر البرمجة الخطية

1- دالة الهدف : الهدف في جميع مشاكل البرمجة الخطية

- يكون اما تحقيق "اقصى" أو "اقل" كمية ما.

2- القيود: تتمثل القيود في موارد محدودة يتنافس على استغاللها :

واستخدامها في مجاالت مختلفة، ويعبر عنها في مشكلة البرمجة الخطية من خلال الكميات المتاحة منها، بمعنى أنه يتم تعظيم أو تدنية المتغيرات الداخلة ضمن دالة الهدف في ظل قيود تتمثل في موارد محدودة، ويعبر عن القيود في شكل معادلات خطية، وهي كما يلي:

- متساوية=
- متباينة أكبر من≤

•متباينة أقل من$\leq$

3- شرط عدم السلبية

أي أن جميع المتغيرات الواقعة في دالة الهدف يجب ان تكون اكبر من او تساوي الصفر $Xj \geq 0$

حل البرمجة الخطية بيانيا

تعد الطريقة البيانية من ابسط طرق البرمجة الخطية التي تهدف الى ايجاد الحلول المناسبة للمسائل الادارية المختلفة)مسائل الانتاج ، مسائل التسويق ، مسائل الافراد)... ، وبخاصة تلك المتعلقة بالتخاذ القرارات ذات الموضوعات الفنية والمعايير الكمية ويعيب هذه الطريقة انه لايمكن استخدامها لحل مشاكل تتضمن اكثر من مجهولين ، وتقوم طريقة الحل بيانيا على تحديد منطقة نقاط الحلول الممكنة بيانيا ، ثم اختيار النقطة التي تحقق احسن قيمة لدالة الهدف.

خطوات الحل البياني

1-يتم تحديد دالة الهدف على شكل معادلة رياضية تمثل المتغيرين للمشكلة المراد حلها.

2-يتم تحديد قيود المسالة على شكل متباينات.

3-يرسم محورين متعامدين ، المحور الافقي يمثل المتغير (x) والمحور العمودي يمثل المتغير (y)

4-نرسم المستقيمات التي تحددها المتباينات ونحدد المنطقة المقبولة والمنطقة المرفوضة(تحديد منطقة الحل)

5-تحديد الحل الامثل للبرنامج الخطي.

- تعني علامة > ان منطقة الحل على يمين او اعلى الخط المستقيم .
- تعني علامة < ان منطقة الحل على يسار او اسفل الخط المستقيم .
- اذا كانت جميع علامات المتباينات او اشارات المتباينات اقل من او يساوي ≥ تكون منطقة الحل محصورة بين تقاطع المستقيمات ونقطة الاصل (0،0).
- اذا كانت اشارات المتباينات تحتوي على اكبر من او اقل من فان منطقة الحل تكون ابعد من منطقة الاصل (0 ، 0)

مثال 1 / تقوم شركة أثاث بتصنيع عدة منتجات من الأخشاب، يتمثل أهمها في الكراسي والطاولات، حيث يبلغ ثمن الكرسي الواحد في السوق 10 $ ،ويحتاج إلى ساعة عمل واحدة في قسم النشر، وساعة عمل واحدة في قسم التجميع، بينما يبلغ ثمن الطاولة 40 $ ، وتحتاج إلى ساعتين عمل في قسم النشر، وخمسة ساعات عمل في قسم التجميع ، وفي اللحظة التي يستوعب فيها السوق جميع المنتجات من كلا المنتجين، لا يستطيع مدير الشركة الحصول شهريا على أكثر من مائة ساعة عمل في قسم النشر، كما لا يستطيع الحصول على أكثر من مائة وخمسين ساعة عمل في قسم التجميع .وفي هذه الحالة يحتاج مدير الشركة إلى أن يحدد مزيج الإنتاج من الكراسي والطاولات الذي يحقق لمؤسسته أعلى عائد.

Example 1

تقوم شركة أثاث بتصنيع عدة منتجات من الأخشاب، يتمثل أهمها في الكراسي والطاولات، حيث يبلغ ثمن الكرسي الواحد في السوق 10$ ،ويحتاج إلى ساعة عمل واحدة في قسم النشر، وساعة عمل واحدة في قسم التجميع، بينما يبلغ ثمن الطاولة 40$ ، وتحتاج إلى ساعتين عمل في قسم النشر، وخمسة ساعات عمل في قسم التجميع ، وفي اللحظة التي يستوعب فيها السوق جميع المنتجات من كلا المنتجين، لا يستطيع مدير الشركة الحصول شهريا على أكثر من مائة ساعة عمل في قسم النشر، كما لا يستطيع الحصول على أكثر من مائة وخمسين ساعة عمل في قسم التجميع.

وفي هذه الحالة يحتاج مدير الشركة إلى أن يحدد مزيج الإنتاج من الكراسي والطاولات الذي يحقق لمؤسسته أعلى عائد

الحل باستخدام الطريقة البيانية

نتبع الخطوات التالية في صياغة المشكلة

أولا	الهدف	الهدف هنا هو تعظيم العائد.
ثانيا	المتغيرات	كراسي ، طاولات.
ثالثا	الرموز	نعبر عن الكراسي(X_1)، ونعبر عن الطاولات ب(X_2).
رابعا	الجدول	حتى يسهل تكوين المعادلات الرياضية توضع البيانات الموضحة في المشكلة في صورة مصفوفة كما يلي:

الحل باستخدام الطريقة البيانية

جدول يبين بيانات المشكلة

	X_1 كراسي	X_2 طاولات	الموارد المتاحة/ شهريا أقل من أو مساوية
قسم النشر	1	2	100ساعة عمل
قسم التجميع	1	5	150 ساعة عمل
سعر البيع	$10	$40	

الحل باستخدام الطريقة البيانية

وضع البيانات في الجدول أعلاه في صورة معادلات كما يلي

Objective function	Max $z=\$10X_1+\$40X_2$	دالة الهدف
constraints	$1X_1+2X_2 \le 100$ $1X_1+5X_2 \le 150$	القيود
Non negative	$X_1 \ge 0, X_2 \ge 0$	عدم السلبية

- 1- تكوين الاحداث السيني والاحداث الصادي $(x_1 - x_2)$
- 2- رسم مستقيمات القيود كما يلي :
- أ-تحويل القيود الى متساويات وذلك كما يلي:
- المستقيم الأول $x_1+2x_2=100$
- المستقيم الثاني $x_1+5x_2=150$

ب- تحديد نقطتين لكل مستقيم حتى يمكن رسمه وذلك بمعرفة قيم الاحداثين كما يلي

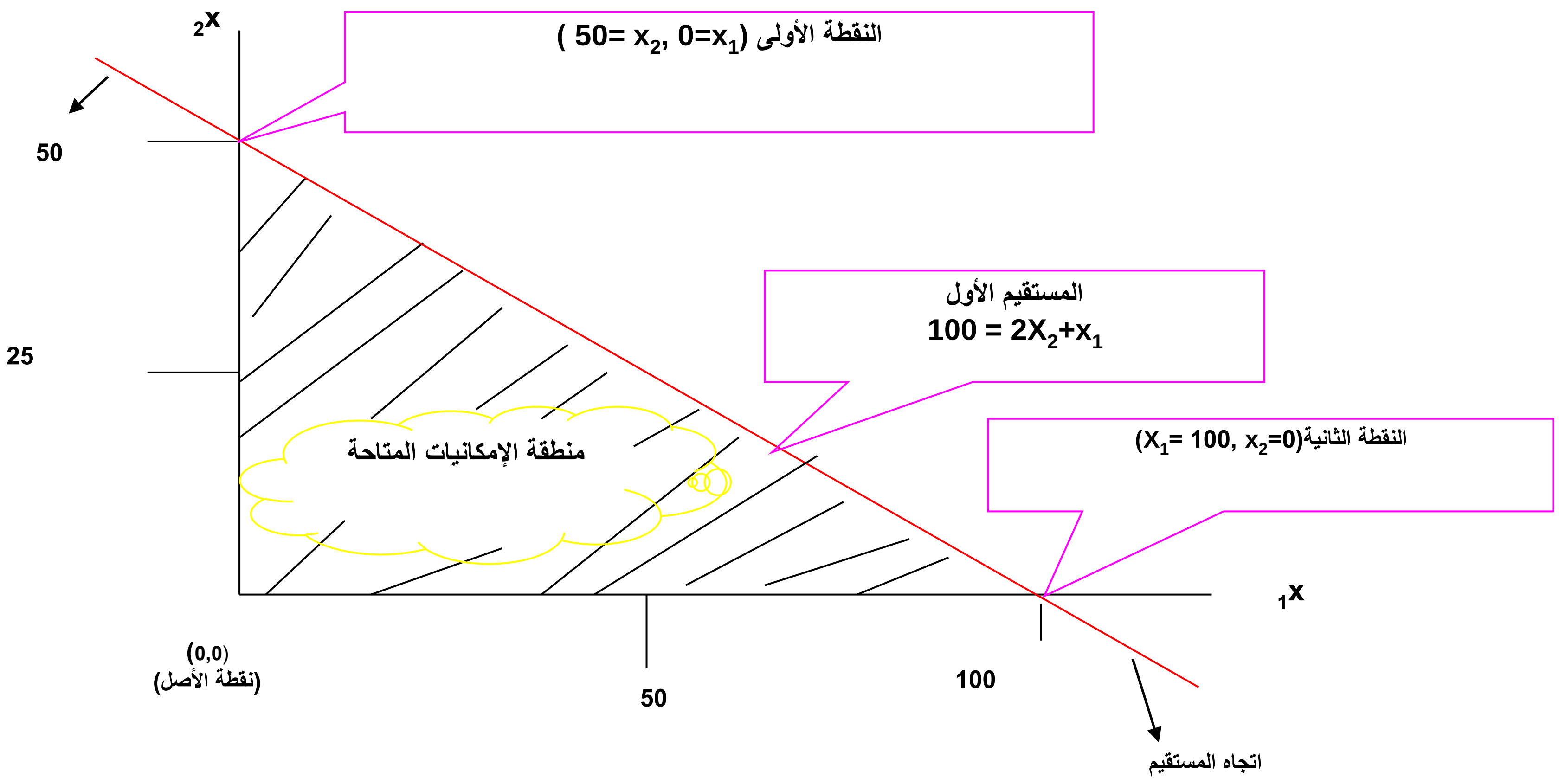
المستقيم الأول	
X_2	X_1
50	0
0	100

وتوضيحا لما تعنيه هذه الأرقام ، افترض ما يلي:

لو فرضنا أن المنتج ركز على إنتاج الطاولات (X_2) ، وأهمل الكراسي(X_1) ، فإنه يستطيع إنتاج 50 طاولة من ساعات الآلة المتوفرة لديه (بفرض أن القيد الأول يعبر عن ساعات العمل لآلة).

بينما إذا ركز الإنتاج على الكراسي (X1) مهملا الطاولات (X2) فإنه يستطيع إنتاج 100 كرسي من ساعات الآلة المتوفرة.

يمكن الآن رسم الإحداثي السيني و الصادي وتحديد المستقيم الأول عليه كما يلي



تحديد اتجاه المستقيم الذي يحققه:

نختبر المستقيم مع نقطة الأصل أي نعوض X_1= صفر ، X_2= صفر

$0+0\leq100$(true) إذن اتجاه المستقيم هو نحو نقطة الأصل ، وهذا يعني ببساطة أن أي نقطة على المستقيم أو بينه و بين نقطة الأصل تحققه. والمنطقة بين المستقيم و نقطة الأصل تسمى منطقة الإمكانيات المتاحة وفق هذا القيد بمعنى أن المنتج يستطيع إنتاج أي كمية ضمن المساحة المظللة و وفق القيد الأول.

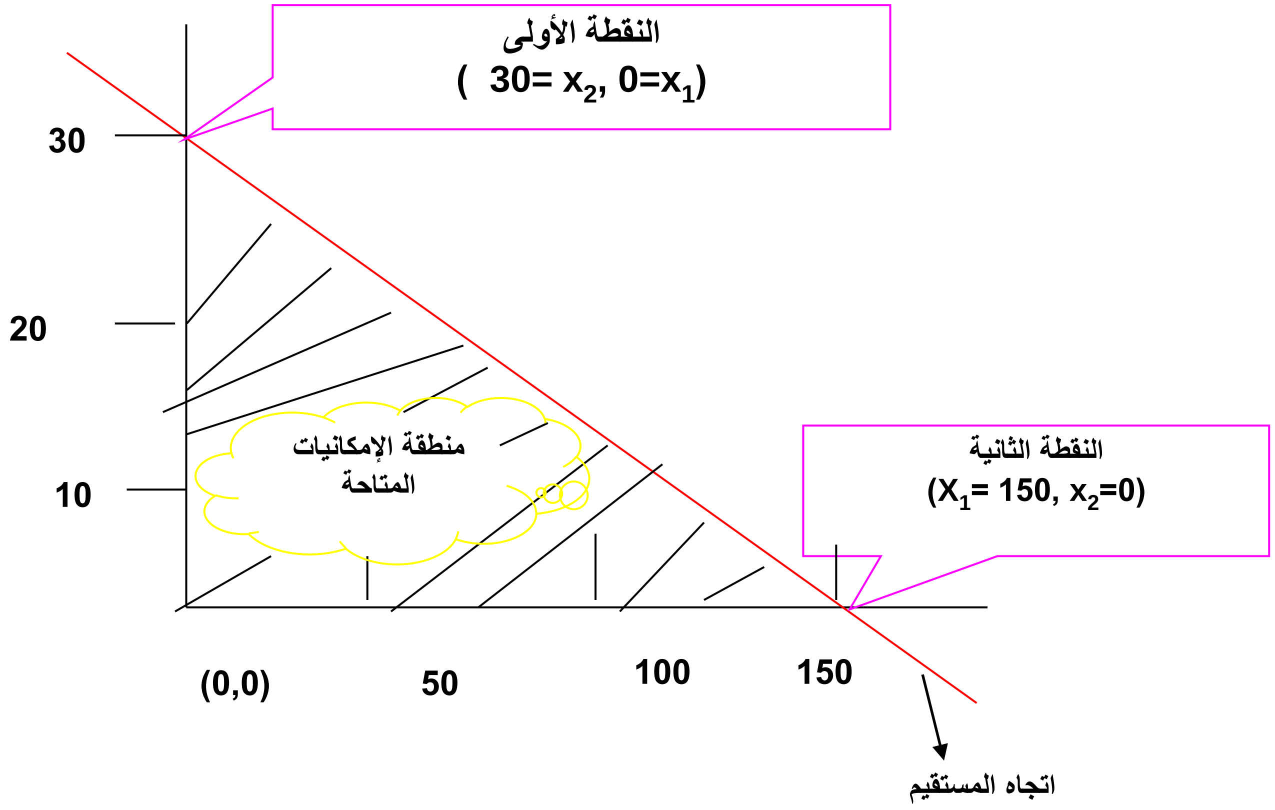
المستقيم الثاني	
X_2	X_1
30	0
0	150

وتوضيحا لما تعنيه هذه الأرقام:

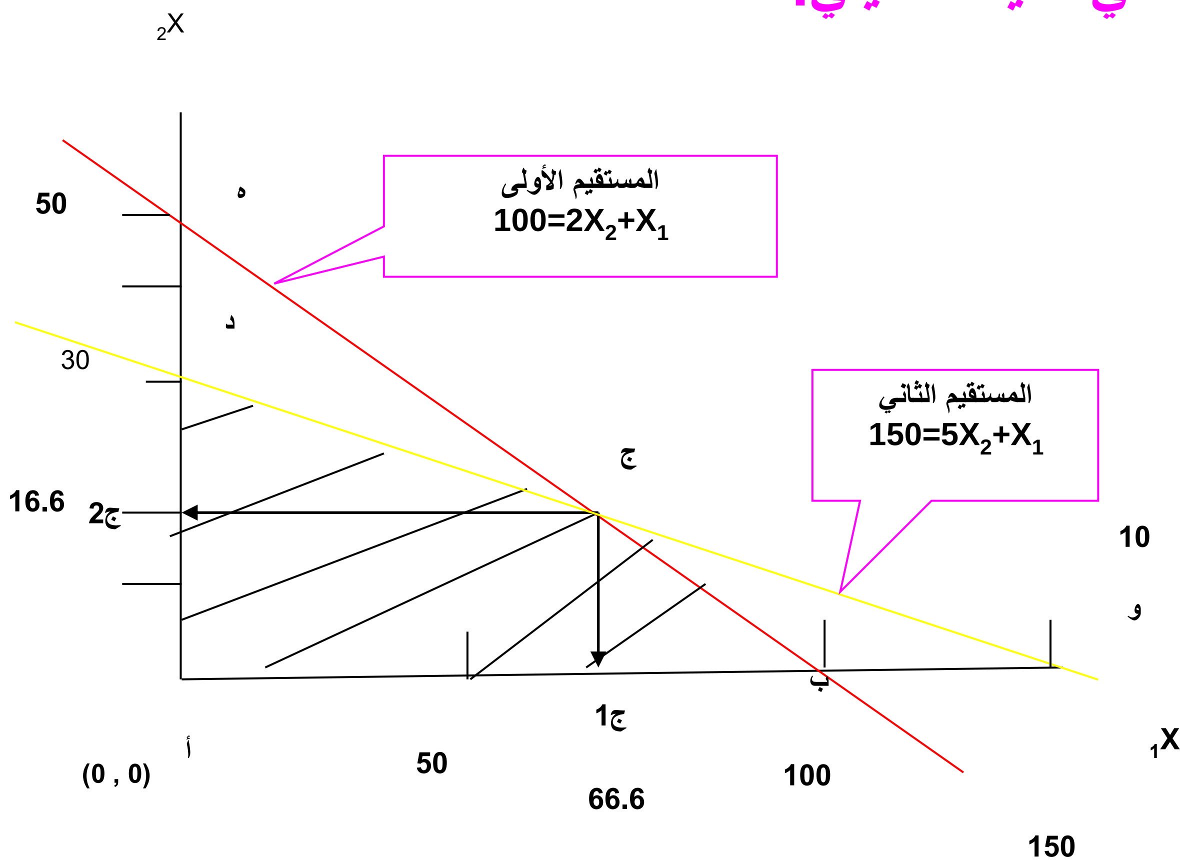
لو فرضنا أن المنتج ركز على إنتاج الطاولات (X_2) فقط ، وأهمل إنتاج الكراسي (X_1) ، فإنه يستطيع إنتاج 30 طاولة من ساعات العمل المتوفرة لديه (بفرض أن هذا القيد يمثل ساعات عمل).

بينما إذا ركز الإنتاج على الكراسي (X1) مهملا للطاولات (X2) فإنه يستطيع إنتاج 150 كرسي من ساعات العمل المتوفرة لديه

يمكن الآن رسم الإحداثي السيني والصادي وتحديد المستقيم الثاني عليه كما يلي :



ويمكن الآن رسم الإحداثي السيني و الصادي وتحديد المستقيمين الأول و الثاني عليه كما يلي:



المطلب الثاني :

نقوم بداية بتحديد منطقة الإمكانيات المتاحة والتي تحقق كلا المستقيمين ، وهي في هذه الحالة المنطقة أ ب ج د المظللة ، حيث يستطيع المنتج إنتاج أي كمية داخل هذه المنطقة وفق القيدين وهما : الوقت المتاح من العمل و الوقت المتاح من الآلة . والهدف من حل هذه المشكلة هو تحقيق أعلى عائد ممكن ، و بإجراء التجارب وجد أن أعلى عائد يتحقق عند نقاط تقاطع المستقيمات ، لذلك يتم اختبار دالة الهدف عند هذه النقاط ، وهي أ ب ج د .

ملاحظات :

أولا : منطقة الإمكانيات المتاحة هي أ ب ج د والتي تحقق كلا المستقيمين .

ثانيا : خروج منطقة و ب ج من منطقة الإمكانيات المتاحة لأنها تحقق المستقيم الثاني فقط ، ولا تحقق المستقيم الأول.

ثالثا : خروج منطقة ه د ج من منطقة الإمكانيات المتاحة لأنها تحقق المستقيم الأول فقط ، ولا تحقق المستقيم الثاني.

المطلب الثالث :

تحديد النقطة التي عندها يكون الربح أعلى ما يكون وذلك من خلال تقييم نقاط تقاطع المستقيمات على أطراف منطقة الإمكانيات المتاحة وكما يلي :

النتيجة ($)	$Z=\$10\ x_1+\$40\ x_2$	X_2	X_1	النقطة
0	0 × 40 + 0 ×10	0	0	أ
1000	0 ×40 + 100 ×10	0	100	ب
1335	16.7 ×40 +66.7 ×10	16.7	66.7	ج
1200	30 ×40 +0 ×10	30	0	د

ملاحظات على نتيجة الحل:

نلاحظ أن أعلى عائد قد تحقق عند النقطة ج ، أي يجب إنتاج 66.7 كرسي ، و 16.7 طاولة لتحقيق عائد قدره 1335$ ونتيجة أنه لا يمكننا إنتاج كسور من الكراسي أو الطاولات يتم تقريبها للقيمة الأدنى حتى تكون ضمن منطقة الإمكانيات المتاحة .

كما يمكن تحديد مدى استغلال الموارد عند النقطة ج $X_1=66\ ,\ X_2=16$

القيود	الطاقة المتاحة	معادلة دالة الهدف	المستغل	الفائض
x_1+2x_2	100	2 *16+ 1 *66	98	لا شيء تقريبا
x_1+5x_2	150	5*16+ 1 *66	146	لا شيء تقريبا

Example 2

تقوم الشركة الصناعية العامة بإنتاج نوعين من الدفاتر المدرسية: دفاتر كتابة ، وكراس رسم ، ولإتمام العملية الإنتاجية ؛ لابد من استخدام آلة، وعدد معين من ساعات العمل، والوقت المتاح للآلة هو 24ساعة، بينما الوقت المتاح من عنصر العمل هو 16ساعة ، تحتاج كل وحدة منتجة من دفاتر الكتابة إلى ساعتين من الآلة، وساعتين من العمل، بينما تحتاج كل وحدة من كراس الرسم إلى 3 ساعات من الآلة و ساعة واحدة من العمل.

ويبلغ سعر كل وحدة مباعة من دفاتر الكتابة 12$ ، ومن كراس الرسم14$، علما بأن الشركة تستطيع أن تبيع سبع وحدات فقط من المنتج الأول ، وست وحدات من المنتج الثاني. وفي هذه الحالة يحتاج مدير الشركة إلى أن يحدد كمية الإنتاج من السلعتين التي تحقق للشركة أعلى عائد

الحل

في هذه الحالة نتبع الخطوات التالية في صياغة المشكلة:

أولا	الهدف	الهدف هنا هو تعظيم العائد
ثانيا	المتغيرات	دفتر كتابة ، كراس رسم
ثالثا	الرموز	نعبر عن دفتر الكتابة بـ x_1 نعبر عن كراس الرسم بـ x_2
رابعا	الجدول	حتى يسهل تكوين المعادلات الرياضية توضع البيانات الموضحة في المشكلة في صورة مصفوفة كما يلي

جدول يبين بيانات المشكلة

	X_1 دفتر كتابة	X_2 كراس رسم	الموارد المتاحة أقل من أو مساوية
الآلة	2	3	24
العمل	2	1	16
سوق1	1	-	7
سوق2	-	1	6
السعر	$12	$14	

وضع البيانات في الجدول أعلاه في صورة معادلات

$$\max z = \$12\, x_1 + \$14\, x_2$$

Subject to:

$2\, x_1 + 3\, x_2 \leq 24$

$2\, x_1 + 1\, x_2 \leq 16$

$x_1 \leq 7$

$x_2 \leq 6$

$x_1 \geq 0 \qquad x_2 \geq 0$

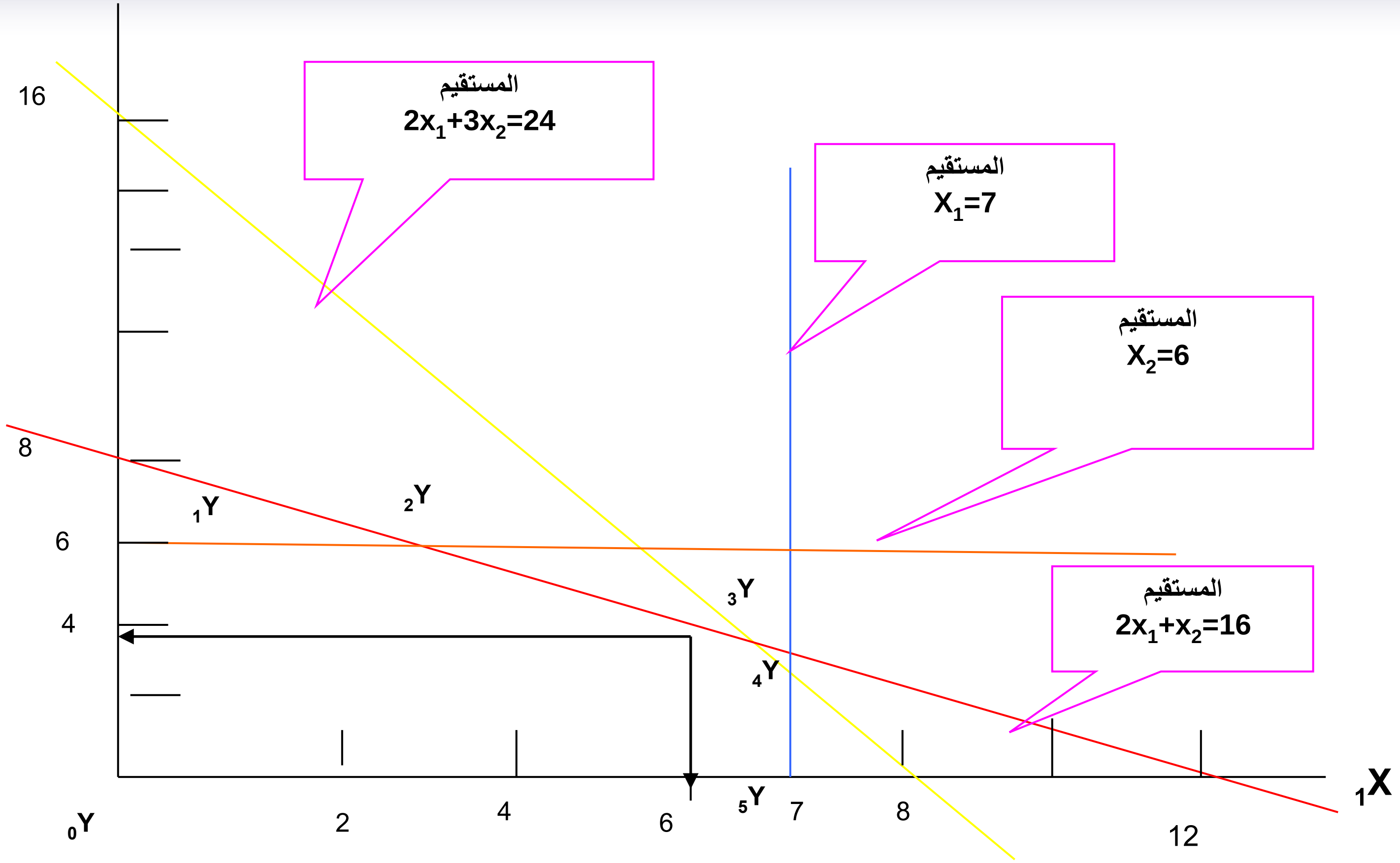
نقوم بإتباع نفس الخطوات المفصلة في المثال الأول ، ولكن يمكننا وضع الحل مختصرا كما يلي :

المستقيم الأول	
$2X_1 + 3X_2 = 24$	
X_1	X_2
0	8
12	0

المستقيم 2	
$2X_1 + X_2 = 16$	
X_1	X_2
0	16
8	0

المستقيم 3
$X_1=7$
X_1
7
—

المستقيم 4
$X_2=6$
X_2
6
—



نقوم بداية بتحديد منطقة الإمكانيات المتاحة، والتي تحقق كلا المستقيمين ، وهي في هذه الحالة المنطقة$Y_0\ Y_1\ Y_2\ Y_3\ Y_4\ Y_5$ ، حيث يستطيع إنتاج أي كمية داخل هذه المنطقة وفق القيود ، وهي الوقت المتاح من العمل ، و الوقت المتاح من الآلة والقدرة التسويقية لكلا المنتجين

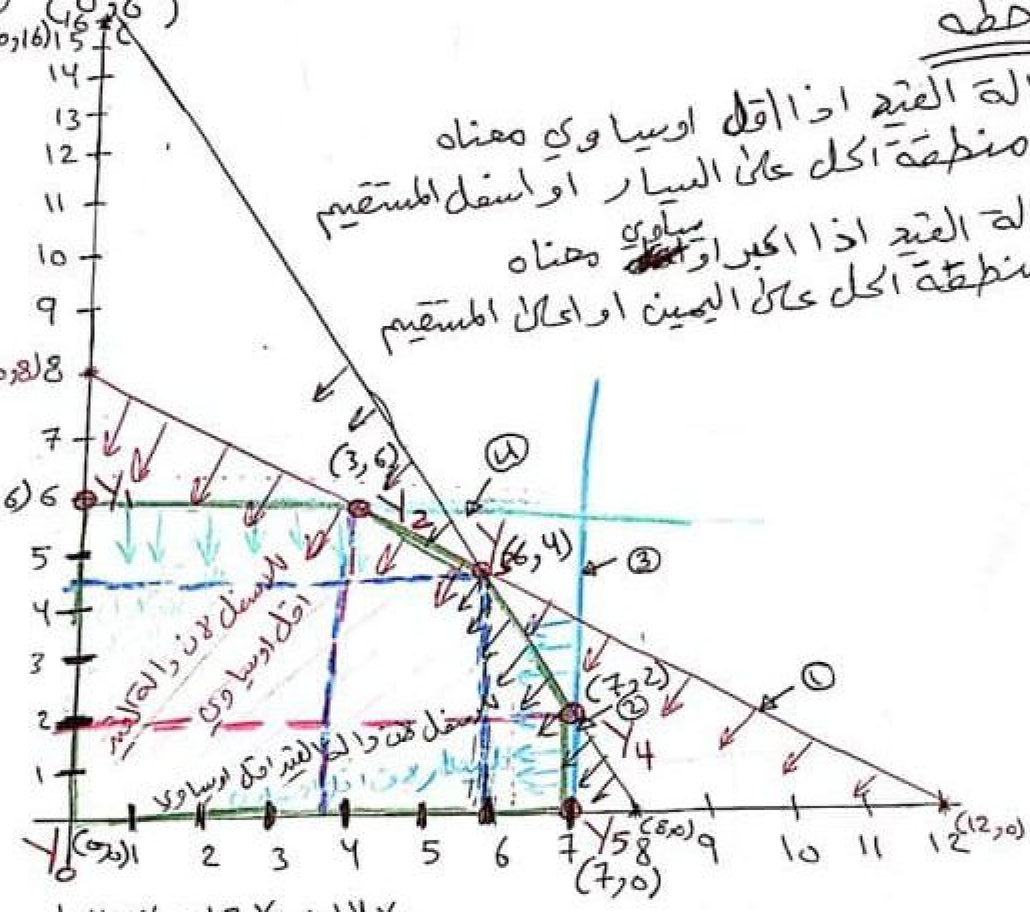
① (0,8), (12,0) ② (0,16), (8,0) ③ (7,0)

④ (0,6)

ملاحظه

* دالة القيد اذا اقل او يساوي معناه منطقة الحل على اليسار او اسفل المستقيم

* دالة القيد اذا اكبر او يساوي معناه منطقة الحل على اليمين او اعلى المستقيم



	$Max = 12X_1 + 14X_2$
(0,0)	0
(0,6)	84
(3,6)	120
(6,4)	128
(7,2)	112
(7,0)	84

$$\boxed{Max\ Z = 128 \text{ when } X_1 = 6 \quad X_2 = 4}$$

الطريقة البيانية *

Ex1 $\text{Max } Z = 40X_1 + 50X_2$

$3X_1 + X_2 \leq 15$

$X_1 + 2X_2 \leq 12$

$X_1, X_2 \geq 0$

Sol :-

$3X_1 + X_2 = 15$

$X_1 + 2X_2 = 12$

* line① $\boxed{3X_1 + X_2 = 15}$

if $X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 15$ $(0, 15)$

if $X_2 = 0 \Rightarrow 3X_1 = 15 \Rightarrow X_1 = 5$ $(5, 0)$

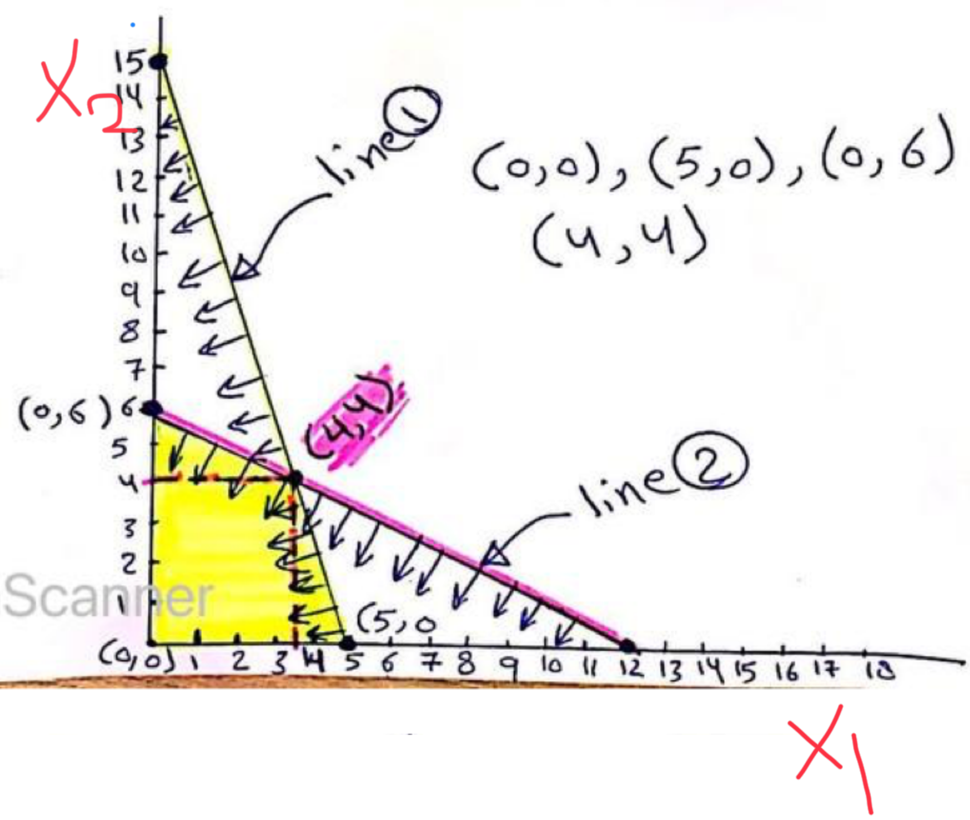
* line②

$\boxed{X_1 + 2X_2 = 12}$

(X_1, X_2)

if $X_1 = 0 \Rightarrow 2X_2 = 12 \Rightarrow X_2 = 6$ $\boxed{(0, 6)}$

if $X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 12 \Rightarrow$ $(12, 0)$



$(0,0), (5,0), (0,6)$

$(4,4)$

النقاط	$Max\ Z = 40X_1 + 50X_2$
(0,0)	$Max\ Z = \boxed{0}$
(5,0)	$Max\ Z = 40*5 + 50*0 = \boxed{200}$
(0,6)	$Max\ Z = 40*0 + 50*6 = \boxed{300}$
(4,4)	$Max\ Z = 40*4 + 50*4 = 160 + 200 = \boxed{360}$

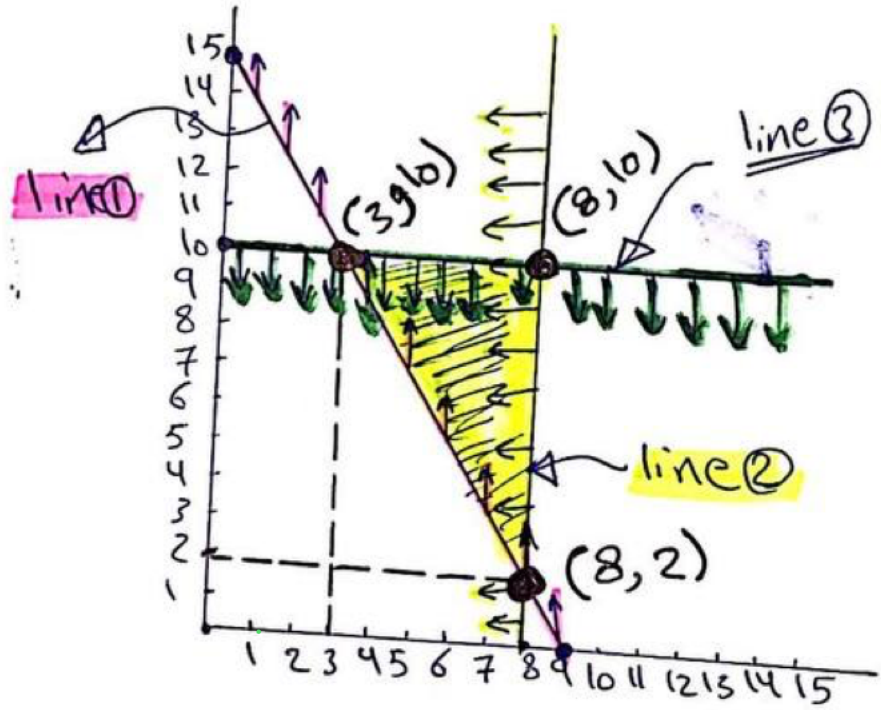
$Max\ Z = 360,\ X_1 = 4\ \ X_2 = 4$

EX_2

$$Max\ Z = 40X_1 + 36X_2$$

subject to

$$5X_1 + 3X_2 \geq 45$$
$$X_1 \leq 8$$
$$X_2 \leq 10$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$



Sol

$$5X_1 + 3X_2 = 45$$
$$X_1 = 8$$
$$X_2 = 10$$

line① $5X_1 + 3X_2 = 45$

if $X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = \frac{45}{3} = 15$ (0,15)

if $X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = \frac{45}{5} = 9$ (9,0)

line② $X_1 = 8 \Rightarrow (8,0)$

line③ $X_2 = 10 \Rightarrow (0,10)$

النقاط	$Max\ Z = 40X_1 + 36X_2$
(8,2)	$Max\ Z = 40*8 + 36*2 \Rightarrow 320 + 72 = \boxed{392}$
(8,10)	$Max\ Z = 40*8 + 36*10 \Rightarrow 320 + 360 = \boxed{680}$
(3,10)	$Max\ Z = 40*3 + 36*10 \Rightarrow 120 + 360 = \boxed{480}$

$\boxed{Max\ Z = 680}$ و $\boxed{X_1 = 8}$ و $\boxed{X_2 = 10}$

ملاحظة

ـ المنطقة المحصورة بين المستقيمات

* اذا كان القيد (اكبر او يساوي) ($\leqslant$) تكون المنطقة الى الاعلى (الاسهم الى الاعلى) او اليمين

* اذا كان القيد (اقل او يساوي) ($\geqslant$) تكون المنطقة الى الاسفل (الاسهم الى الاسفل باتجاه الصفر (نقطة الاصل) او اليسار

Ex:

Max $Z = 10X_1 + 2X_2$

S.T.

$8X_1 + 4x_2 \leq 32$

$6x_1 + 8X_2 \leq 48$

$4X_1 + 6X_2 \leq 24$

$X_1, x_2 \geq 0$

Sol:

$8X_1 + 4x_2 = 32$

At $x_1=0$ $X_2=8.$ (0,8)

At $x_2=0$ $X_1= 4$ (4,0)

$6x_1 + 8X_2 = 48$

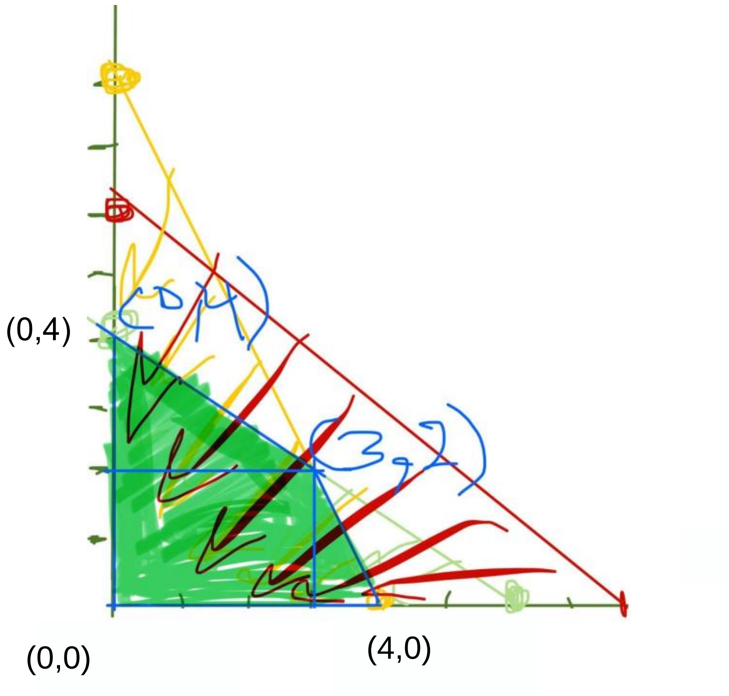
At $x_1=0$ $X_2=6.$ (0,6)

At $x_2=0$ $X_1=8.$ (8,0)

$4X_1 + 6X_2 = 24$

At $x_1=0$ $X_2=4.$ (0,4)

At $x_2=0$ $X_1= 6.$ (6,0)



(0,0) ; (4,0) ; (3,2); (0,4)

Max Z = $10X_1 + 2X_2$

- (0,0)   Max Z = 0
- (4,0).   Max z =10*4+0= 40
- (3,2).   Max Z = 10*3+ 2*2 = 34
- (0,4).   Max Z = 0 + 2*4 = 8

Max Z = 40 at $x_1 = 4$, $x_2 = 0$