مثال : اوجد الشغل المبذول بواسطة مجال القوة $\boldsymbol{F}$ على المنحني الممثل بمتجه الموضع $\boldsymbol{r}$ وذلك بين النقطتين $\boldsymbol{A(0,0,0)}$ و $\boldsymbol{B(1,1,1)}$

$\mathbf{F} = (y-x^2)\, i + (z-y^2)\, j + (x-z^2)\, k$

$\mathbf{r} = t\, i + t^2\, j + t^3\, k \quad , \quad 0 \le t \le 1$

……………………

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = i + 2t\, j + 3t^2\, k$$

نضع المجال المتجه $\boldsymbol{F}$ بدلالة $\boldsymbol{t}$ حيث ناخذ $\boldsymbol{x}$ و $\boldsymbol{y}$ و $\boldsymbol{z}$ معادلة متجه الموضع $\boldsymbol{r}$:

$$\mathbf{F} = (t^2 - t^2)\, i + (t^3 - t^4)\, j + (t - t^6)\, k$$

$$= (t^3 - t^4)\, j + (t - t^6)\, k$$

$$\mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 2\, t^4 - 2t^5 + 3t^3 - 3\, t^8$$

$$\text{Work} = \int_0^1 \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}\, dt = \int_0^1 \left(2\, t^4 - 2t^5 + 3t^3 - 3\, t^8\right) dt = \frac{87}{180}$$

ملاحظة حول التحقيق للحل بتكامل الخط : Line integral

*نفحص المجال هل هو محافظ فاذا كان محافظا يمكن اجراء التكامل مباشرة بدون الحاجة الى المنحني الواصل بين النقطتين **A** و **B** واذا كان المجال غير محافظ يجب ان يتم تكامل الخط على المنحني المحدد بالسؤال المعطى بواسطة متجه الموضع **r** بين النقطتين .*

هناك ثلاثة شروط يجب ان تتحقق لكي يكون المجال محافظا وهي :

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\frac{\partial N}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

*نطبق الشرط الاول فيكون : (لاحظ ان **M,N,P** تؤخذ من معادلة $\boldsymbol{F}$)*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

نلاحظ ان الشرط الاول غير متحقق وهذا كاف لنقول ان المجال غير محافظ . لذلك يجب اجراء التكامل مع المنحني المعطى بالضبط كما فعلنا في الحل اعلاه .

تمرين 1 : اوجد الشغل المبذول بواسطة مجال القوة $\boldsymbol{F}$ على المنحني الممثل بمتجه الموضع $\boldsymbol{r}$

$\mathbf{F} = (1-x)\, i + z\, j + (x-z)\, k$

$\mathbf{r} = 2t\, i + t^2\, j + (2+t)\, k \quad , \quad 0 \le t \le 1$

تمرين 2 : اوجد الشغل المبذول بواسطة مجال القوة $\boldsymbol{F}$ على المنحني الممثل بمتجه الموضع $\boldsymbol{r}$

$\mathbf{F} = x\, i + 3\, j - y\, k$

$\mathbf{r} = t\, i - 2t\, j \quad , \quad 0 \le t \le 1$

مثال : اوجد المساحة للسطح الذي يصنعه المستوى ادناه مع المحاور الثلاثة بالاتجاه الموجب لها . استعمل تكامل السطح .

$$x + y + z = 1$$

………………………………………...

الفكرة العامة هي ايجاد نسبة المساحة $\boldsymbol{dA}$ وهي للمسقط على المستوي $\boldsymbol{xy}$ الى المساحة $\boldsymbol{d\sigma}$ وهي للسطح المائل . هذه النسبة تمثل جيب تمام الزاوية التي تصنعها $\boldsymbol{d\sigma}$ مع $\boldsymbol{dA}$ ثم نقلب هذه النسبة لتكون معامل تكبير الى $\boldsymbol{dA}$ ونجري تكامل السطح كما في المعادلة التالية :

$$\sigma = \iint \frac{d\sigma}{dA}\, dA$$

هذه النسبة يمكن التعبير عنها بنسبة مقدار المشتقة الاتجاهية للسطح $|\boldsymbol{\nabla f}|$ الى مقدار مركبة هذه المشتقة على المحور الرأسي $|\boldsymbol{\nabla f . k}|$ لذلك يكون :

$$\sigma = \iint \frac{|\boldsymbol{\nabla f}|}{|\boldsymbol{\nabla f . k}|}\, dA$$

وهكذا يكون :

$f(x,y,z) = x+y+z$

$\nabla f = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$

$|\nabla f| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{\mathbf{3}}$

$\nabla f . \mathrm{k} = \boldsymbol{1}$

$|\nabla f . k| = \boldsymbol{1}$

وبالتالي يكون :

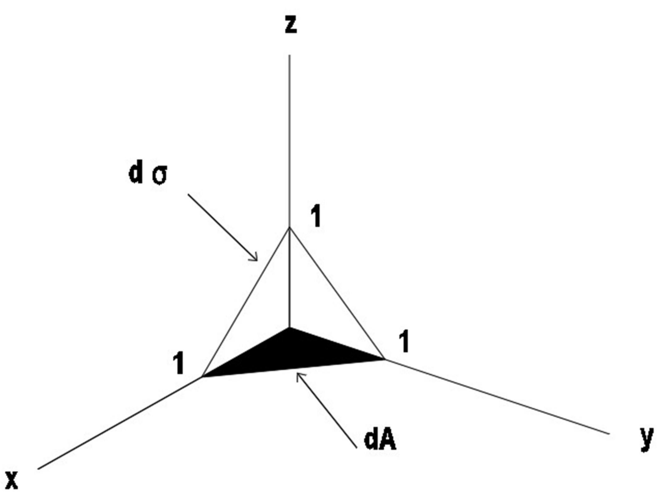
$$\sigma = \iint \frac{\sqrt{3}}{\mathbf{1}}\, dA = \sqrt{\mathbf{3}} \iint dA$$

المقدار $\iint \mathrm{dA}$ *معناه مساحة المقطع المظللة في الشكل :*

Projected area = 1×1 / 2 = 1 / 2

ولذلك يكون :

Inclined area = $\sqrt{\mathbf{3}}$ ***/ 2***



تمرين : اوجد المساحة للسطح الذي يصنعه المستوى ادناه مع المحاور الثلاثة بالاتجاه الموجب لها . استعمل تكامل السطح .

$$3x + 2y + z = 12$$

مثال : اوجد التدوير ***circulation*** الناتج من المجال المتجه $\boldsymbol{F = yi}$ المطبق على الدائرة $x^2 + y^2 = 16$

....

من ملاحظة شكل المجال والدائرة في الشكل التالي يمكن ان نتوقع وجود تدوير ***circulation*** وهو سالب لانه باتجاه عقرب الساعة . اما خطوات الحل فهي كما يلي حيث نبدأ بتمثيل الدائرة بمتجه موضع $\boldsymbol{r}$:

$\mathbf{r} = 4 \cos t\, i + 4 \sin t\, j \;\; , 0 \leq t \leq 2\pi$

$\mathbf{F} = y\, i \; = 4 \sin t\, i$

لاحظ اننا مثلنا المجال بدلالة $\boldsymbol{t}$ حيث جلبنا $\boldsymbol{y}$ من معادلة $\boldsymbol{r}$:

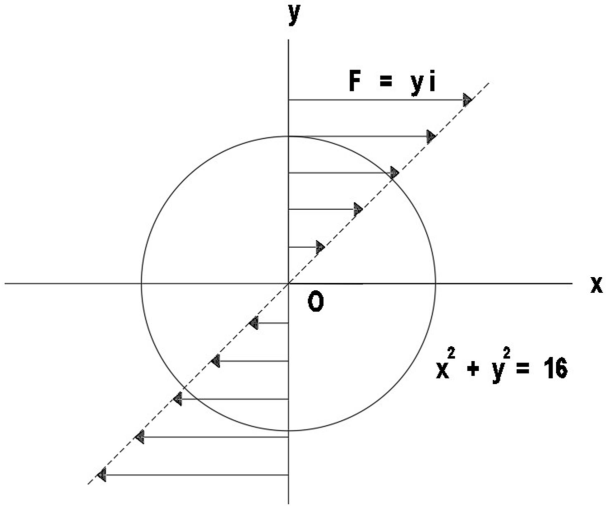
$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = - 4 \sin t\, i + 4 \cos t\, j$

$\mathbf{F}.\ \frac{d\mathbf{r}}{dt} \; = \; - 16 \sin^2 t$

$\text{Circulation} = \oint \mathbf{F}.\ \frac{d\mathbf{r}}{dt}\, dt$

$$= - 16 \oint \sin^2 t\, dt \; = \; - 16 \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{2\pi}$$

$$= - 16\pi$$



لاحظ انه باستعمال نظرية جرين ***Green's theorem*** فان الحل يكون اسرع بكثير . تنص نظرية جرين على انه :

$$\text{Circulation} = \iint curl\ \boldsymbol{F}\ dA$$

حيث :

$$\text{curl } \mathbf{F} = \frac{\partial N}{\partial X} - \frac{\partial M}{\partial y}$$

لذلك : (لاحظ ان $\boldsymbol{dA}$ هي للمنطقة الدائرية)

$\mathbf{F} = y\ i$

$\text{curl } \mathbf{F} = \frac{\partial N}{\partial X} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0 - 1 = -1$

$\text{Circulation} = \iint curl\ \boldsymbol{F}\ dA = -\iint dA = -(4)^2 \pi = -16\pi$

تمرين : اوجد التدوير ***circulation*** الناتج من المجال المتجه $\boldsymbol{F} = 2x\boldsymbol{j}$ المطبق على الدائرة $x^2 + y^2 = 4$

هل المجال محافظ Conservative ؟

يمكن ان نفحص المجال هل هو بتطبيق ثلاثة شروط يجب ان جميعها وهي :

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\frac{\partial N}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

فمثلا لو تحققنا من المجال المتجه التالي :

$$\mathbf{F} = 2xy\ i + x^2\ j + 5\ k$$

*نطبق الشرط الاول فيكون : (لاحظ ان **M,N,P** تؤخذ من معادلة **F**)*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x$$

كما هو واضح تحقق الشرط الاول. نطبق الشرط الثاني :

$$\frac{\partial M}{\partial z} = 0 \quad , \quad \frac{\partial P}{\partial x} = 0$$

الشرط الثاني تحقق ايضا . نطبق الشرط الثالث :

$$\frac{\partial N}{\partial z} = 0 \quad , \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

الشرط الثالث تحقق ايضا لذلك يمكن القول ان المجال محافظ ...

ولكن ما معنى ذلك ؟