1 القياس measure

- هو مفهوم يستخدم لتعميم generalization و صياغة formalization القياسات الهندسية geometric مثل الطول والمساحة والحجم وكذلك كميات اخرى مثل الكتلة mass وكذلك الاحتمال probability
- هذه القياسات واشباهها كثير جدا و يمكن التعامل معها بمحتوى واحد هو القياس
- اول دخول للقياس في الرياضيات هو اوائل القرن 20
- من رواده بوريل وليبسك ولوزين ورادون وكاراثيودري وفريخت
- رمزه عادة μ
- **التعريف** :

اذا كانت لدينا مجموعة X وكان لدينا جبر سجما هو $\sum$ (لاحظ دلالة الجمع هنا لان جبر سجما على مجموعة معينة هو مجموع المجموعات الجزئية لهذه المجموعة) على X فان دالة المجموعة set function التي هي μ من $\sum$ الى امتداد خط الاعداد الحقيقية تسمى "قياس" measure اذا حققت ما يلي :

1- اللاسالبية non-negativity لكل E اي الفضاء الاقليدي في $\sum$ اي ان :

$$\mu (E) \geq 0$$

2- لا تحتوي على المجموعة الخالية اي ان :

$$\mu(\emptyset) = 0$$

3- خاصية الجمع القابلة للعد countable additivity او ما يسمى جمع سجما -σ additivity وذلك لكل المجاميع القابلة للعد countable collections اي $\{ E_k \}_{k=1}^{\infty}$ من مجموعات الازواج الغير متصلة pairwise disjoin sets في $\sum$

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_K) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu (E_K)$$

ملاحظات :

- اذا كانت هناك مجموعة واحدة على الاقل **E** لها قياس منتهي **finite** فان الشرط الثاني يعتبر متحققا (اي لا توجد مجموعة خالية) . ولاثبات ذلك فانه بسبب خاصية الجمع القابلة للعد :

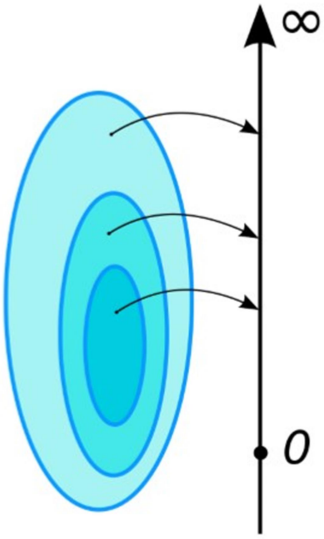
$$\mu(E) = \mu (E \cup \emptyset) = \mu(E) + \mu (\emptyset)$$

ولذلك يكون : $\mu(\boldsymbol{\emptyset}) = \mathbf{0}$

- اذا اسقطنا شرط اللاسالبية وكان ل μ قيمة واحدة على الاقل من ما لانهاية الى سالب ما لا نهاية فان μ تسمى **signed measure**

الفضاء القابل للقياس : **measurable space** هو الزوج **pair** : $(X, \sum)$
ومكونات **members** سجما $\sum$ تسمى مجموعات قابلة للقياس **measurable sets** اما الثلاثي **triple** وهو $(X, \sum, \mu)$ فيسمى فضاء القياس **measure space**

- يوضح الشكل (1) القياس **measure** بشكل مخطط حيث المجموعات بالازرق هي سجما والقياس هو الدالة من سجما الى خط الاعداد وهو ما يسمى μ



- لاحظ انه اذا كانت **A** مجموعة جزئية من **B** فان قياس **A** اقل من او يساوي قياس **B** وهذه الخاصية تجعل القياس وحيد النغمة **monotone** .
- كذلك فان قياس المجموعة الخالية يساوي صفر .
- من الأمثلة البسيطة للقياس هو الحجم (الحجم قياس **measure**)