البعد بين المستوي العام ونقطة الاصل

ان معادلة المستوي العام هي :

$$\mathbf{ax + by + cz = d}$$

حيث $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{b}$ و $\boldsymbol{c}$ و $\boldsymbol{d}$ ثوابت .

وبما ان المسافة بين المستوي ونقطة الاصل تكون عمودية على المستوي فان الخط المستقيم الذي يمثلها (تقع عليه) يكون موازيا للمتجه $\boldsymbol{N}$ العمودي على المستوي حيث :

$$\boldsymbol{N = ai + bj + ck}$$

ولذلك فان معادلة هذا الخط المستقيم يمكن الحصول عليها من المتجه $\boldsymbol{N}$ ومن نقطة الاصل لانه يمر بها وتكون كما يلي :

$$\frac{x-0}{a} = \frac{y-0}{b} = \frac{z-0}{c}$$

$$\boldsymbol{Or :}\ \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

فاذا سمينا المقدار الثابت (الكسور المتساوية) في هذه المعادلة $\boldsymbol{t}$ فسوف يكون :

$$x = at\ ,\ y = bt\ ,\ z = ct$$

وبتعويض $\boldsymbol{x, y, z}$ معادلة المستوي نحصل على نقطة تقاطع المستقيم مع المستوي :

$$\mathbf{ax + by + cz = d \ldots.gives :}$$

$$\mathbf{a^2t + b^2t + c^2t = d}$$

$$\mathbf{t = \frac{d}{a^2 + b^2 + c^2}}$$

so :

$$\boldsymbol{x_o} = \frac{ad}{a^2 + b^2 + c^2}\ ,\ y_o = \frac{bd}{a^2 + b^2 + c^2}\ ,\ Z_o = \frac{cd}{a^2 + b^2 + c^2}$$

وهي احداثيات نقطة تقاطع المستقيم مع المستوي .

الان ...المسافة بين المستوي ونقطة الاصل ولتكن $\boldsymbol{D}$ هي بالضبط المسافة بين هذه النقطة ونقطة الاصل ولذلك :

$$D = \sqrt{(\boldsymbol{x_o - o})^2 + (\boldsymbol{y_o - o}) + (\boldsymbol{z_o - o})}$$

So :

$$D = \sqrt{\left(\frac{ad}{a^2+b^2+c^2}\right)^2 + \left(\frac{bd}{a^2+b^2+c^2}\right)^2 + \left(\frac{cd}{a^2+b^2+c^2}\right)^2}$$

$$\boldsymbol{D = \frac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

مثال :

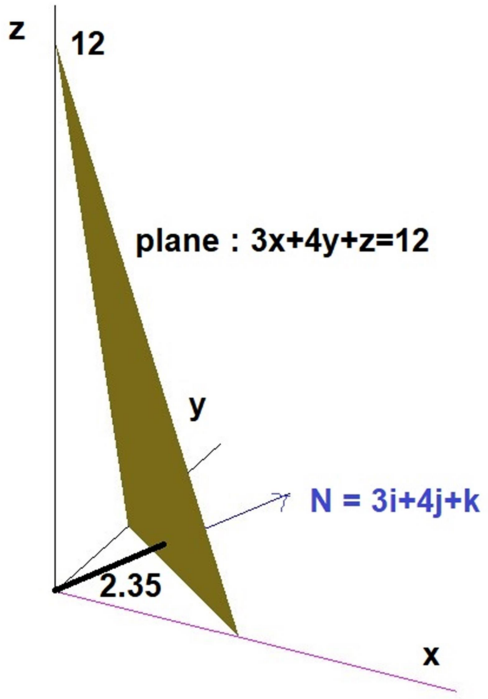
لايجاد المسافة بين المستوي المعطى بالمعادلة وبين نقطة الاصل :

$$\mathbf{3x + 4y + z = 12}$$

$$\mathbf{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$$

$$D = \frac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{12}{\sqrt{3^2+4^2+1^2}} = \frac{12}{\sqrt{26}} = \boldsymbol{2.35}$$

الشكل (1) يوضح المستوي ومسافته عن الاصل



الشكل (1) بعد المستوي عن الاصل في المثال

تفسير البعد بين المستوي ونقطة الاصل

ان المستوي سطح يمكن ان يمثل جهدا معينا ***potential*** كأن يكون الطاقة ***energy*** ويرمز لدالة الجهد عادة ***f (x,y,z)*** اي ان المعادلة

$$3x + 4y + z = 12$$

يمكن كتابتها بالشكل :

$$3x + 4y + z = f$$

حيث انه في المعادلة منسوب ***level*** دالة الجهد ***f*** هو 12 .

بينما يمثل المتجه العمود على المستوي ***N*** المشتقة الاتجاهية لدالة الجهد (الطاقة مثلا) اي :

$$N = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k$$

فمثلا للمثال اعلاه كان المتجه العمود اي المشتقة الاتجاهية لدالة الجهد :

$$N = \nabla f = 3\, i + 4\, j + k$$

وطبعا تمثل هذه المشتقة القوة لان مشتقة الطاقة (او الشغل) بالنسبة للازاحة هي القوة .

ولهذه المشتقة (اي القوة) مقدار هو طول المتجه ***N*** لذلك فان هذا المقدار هو :

$$|N| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{26}$$

وبصورة عامة لاية معادلة مستوي :

$$|N| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

وبما ان الشغل او الطاقة هو حاصل ضرب القوة في المسافة فان المسافة بين المستوي ونقطة الاصل لابد ان تساوي حاصل قسمة الطاقة (الجهد) على مقدار القوة ولذلك يكون :

$$\boldsymbol{D = \frac{d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{12}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 1^2}} = \frac{12}{\sqrt{26}} = 2.35}$$

وهو ما توصلنا اليه اعلاه .

ان الطاقة وهي هنا ***f*** لا يمكن ان تظهر كقوة الا اذا توفر لها المكان (المسافة التي ابتعد بها المستوي عن الاصل) اي ***|N|***

ويمكن القول ايضا ان القوة وهي هنا ***N*** تنجز شغلا (اي تستهلك طاقة) عند انطلاقها من نقطة الاصل حتى السطح المستوي ....

تطبيق نفس المفهوم على الكرة

ان معادلة الكرة التي مركزها نقطة الاصل هي :

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

حيث r نصف قطر الكرة

وبما ان المسافة بين سطح الكرة ونقطة الاصل تكون عمودية على سطح الكرة في اية نقطة من هذا السطح فان الخط المستقيم الذي يمثلها (تقع عليه) يكون موازيا للمتجه N العمودي على سطح الكرة حيث يمكن ايجاد N باعتباره المشتقة الاتجاهية للسطح ∇f

$$N = \nabla f = 2xi + 2yj + 2zk$$

ومن ملاحظة وجود نفس الثابت 2 في الحدود الثلاثة يتبين ان المتجه هو :

$$N = xi + yj + zk$$

ان طول هذا المتجه هو :

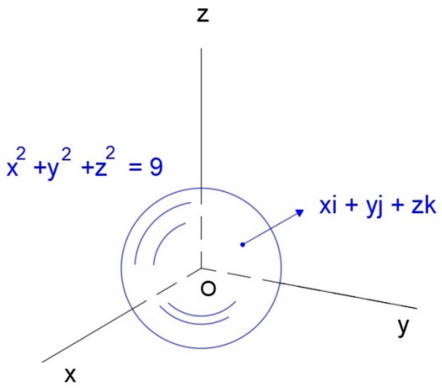
$$|N| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{9} = 3$$

يجب هنا الانتباه الى ان جهد السطح اي منسوب الدالة f هو الحد الثابت 9

وبما ان الشغل او الطاقة هو حاصل ضرب القوة في المسافة فان المسافة بين سطح الكرة ونقطة الاصل لابد ان تساوي حاصل قسمة الطاقة (الجهد) على مقدار القوة ولذلك يكون :

$$D = \frac{9}{3} = 3$$

,وهو نفسه نصف القطر فعلا . انظر الشكل (2)



الشكل (2) المشتقة الاتجاهية لسطح الكرة