المثال – 11

اوجد ناتج المقدار التالي :

$$C = 2i^9 + 5i^3 - \frac{4}{i^{60}} + \frac{1}{i}$$

....

$$i^9 = i^{4(1)+1} = i$$

$$i^3 = -i$$

$$\frac{4}{i^{60}} = \frac{4}{i^{4(15)}} = \frac{4}{1} = 4$$

$$\frac{1}{i} = -i$$

So :

$$C = 2i - 5i - 4 - i = -4 - 4i$$

المثال – 12

بين ان العدد المركب $-1+2i$ يحقق المعادلة التالية :

$$z^2 + 2z + 5 = 0$$

....

$z = -1 + 2i$, so : $z^2 = 1 - 4i - 4 = -3 - 4i$

$z^2 + z + 5 = -3 - 4i + 2(-1 + 2i) + 5 = 0$

المثال – 13

اكتب المعادلة العقدية التالية على شكل معادلتين حقيقيتين real equations :

$$\mathbf{z^2 + z = z^3 + 3i}$$

……………………………..

الفكرة هنا هي مساواة x في الطرف الايسر مع x في الطرف الايمن ومساواة y في الطرف الايسؤ مع y في الطرف الايمن وبذلك نحصل على معادلتين حقيقيتين :

Let $z = x + iy$

So :

$$z^2 = x^2 + 2xyi - y^2 = (x^2 - y^2) + (2xy)\, i$$

$$z^3 = x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - y^3i = (x^3-3xy^2) + (3x^2y-y^3)\, i$$

$$\mathbf{z^2 + z =} \ (x^2 - y^2) + (2xy)\, i + x + yi = \mathbf{(x^2 + x - y^2) + (2xy + y)\, i}$$

$$\mathbf{z^3 + 3i =} \ (x^3-3xy^2) + (3x^2y-y^3)\, i + 3i = \mathbf{(x^3-3xy^2) + (3x^2y-y^3 + 3)\, i}$$

وبالتالي تكون المعادلتان الحقيقيتان :

$$\mathbf{x^2 + x - y^2 = x^3-3xy^2 \ …….(1)}$$

$$\mathbf{2xy + y = 3x^2y-y^3 + 3 \ …….(2)}$$

المثال – 14

اوجد z من المعادلات التالية :

$$\mathbf{5zi = 2}$$

……………………………..

$$z = \frac{2}{5i} = \mathbf{-\frac{2}{5}\, i}$$

$$\frac{\mathbf{z}}{\mathbf{1+z}} = \mathbf{3 - 5i}$$

……………………………

$$3 - 5i + 3z - 5iz = z$$

$$z\,(1+5i - 3) = 3 - 5i$$

$$z = \frac{3-5i}{-2+5i} = \frac{31}{19} + \frac{5}{19}\,i$$

$$\mathbf{6z^2 + iz - 3 = 0}$$

……………………………

$$6z^2 + iz - 3 = 0$$

$$6\,(x+iy) + i(x+iy) - 3 = 0$$

$$6\,(x^2+2xyi-y^2) + ix - y - 3 = 0$$

So : $(6x^2-6y^2-y-3) + i(12xy + x) = 0$

This gives :

$$x(12y+1) = 0$$

either $x = 0$ or $y = \frac{-1}{12}$ or the both

assume x=0 :

$6x^2-6y^2-y-3 = 0$ gives : $0 - 6(\frac{1}{144)}) + \frac{1}{12} - 3 = 0$

This is not correct , so : $x \neq 0$

$$6x^2-6y^2-y-3 = 0$$

$$x^2 = \frac{71}{144} \text{ and } x = \frac{\sqrt{71}}{12}$$

$$z = \frac{\sqrt{71}}{12} - \frac{1}{12} i$$

$$\mathbf{z^2 + 25 = 0}$$

…………………………..

$$z^2 + 25 = 0$$

$$z^2 = -25$$

$$\mathbf{z = 5i \quad or \quad z = -5i}$$

المثال – 15

اوجد z_1 و z_2 اللذين يحققان المعادلتين :

$$\mathbf{(3+i)\, z_1 + 2z_2 = 8i}$$

$$\mathbf{2iz_1 - (1+i)\, z_2 = 3}$$

…………………………..

Let $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$

From the first equation : $(3+i)(x_1 + iy_1) + 2(x_2 + iy_2) = 8i$

So :

$$(3x_1 + 2x_2 - y_1) + (3y_1 + x_1 + 2y_2) = 8i$$

$$3x_1 + 2x_2 - y_1 = 0 \ldots\ldots(1)$$

$$3y_1 + x_1 + 2y_2 = 8 \ldots..(2)$$

From the second equation : $2i(x_1 + iy_1) - (1+i)(x_2 + iy_2) = 3$

So :

$$(2y_1 - y_2 - x_2) + (2x_1 - y_2 - x_2) = 3$$

$$2y_1 - y_2 - x_2 = 3 \ldots\ldots(3)$$

$$2x_1 - y_2 - x_2 = 0 \ldots..(4)$$

وهكذا حصلنا على اربع معادلات لأربعة مجاهيل وبحلها نحصل على :

$$x_1 = \frac{1}{2} \quad , \quad y_1 = 2 \quad , \quad x_2 = \frac{1}{4} \quad , \quad y_2 = \frac{3}{4}$$

ولذلك يكون :

$$\mathbf{z_1 = \frac{1}{2} + 2i \qquad , \quad z_2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}i \qquad ,}$$

المثال – 16

اوجد جميع الحلول للمعادلة :

$$\boldsymbol{z^4 - 1024 = 0}$$

……………………………..

$$z^4 - 1024 = 0$$

$$z^4 = 1024$$

$$(x + iy)^4 = 1024$$

$$x^4 + 4x^3yi + 6x^2y^2i^2 + 4xy^3i^3 + (iy)^4 = 1024$$

$$x^4 + 4x^3yi - 6x^2y^2 - 4xy^3i + y^4 = 1024 \ldots\ldots(*)$$

So :

$$x^4 - 6x^2y^2 + y^4 = 1024 \ldots..(1)$$

$$4x^3yi - 4xy^3i = 0 \quad \ldots.(2)$$

From eq. (2) : x = y

But when substituted in eq. (1) for y :

y^4 -6 y^4+ y^4 = 1024

This gives : y^4 = - 256

و هذه المعادلة غير صحيحة لانها تؤدي الى قيم لا تحقق المعادلة الاصلية كما يلي :

y^4 = - 256

y^2 = 16i or -16i

y = $4\sqrt{i}$ or - $4\sqrt{i}$

so :

x = $4\sqrt{i}$ or - $4\sqrt{i}$

والمفروض ان تكون مجموعة الحل : (لاحظ ما تؤدي اليه كل حالة)

($4\sqrt{i}$ + $4\sqrt{i}$) this gives from eq. (*) : z^4 = 1024

(-$4\sqrt{i}$ + $4\sqrt{i}$) this gives from eq. (*) : z^4 = 1024

($4\sqrt{i}$ -$4\sqrt{i}$) this gives from eq. (*) : z^4 = 1024

(-$4\sqrt{i}$ - $4\sqrt{i}$) this gives from eq. (*) : z^4 = 1024

بدلا من ذلك فان معنى x=y ان يكون لهما نفس القيمة ولكن في كل مرة يكون احدهما صفرا ولذلك فان مجموعة حل اخرى نحصل عليها كما يلي :

$z^4 - 1024 = 0$

z^4= 1024

$z^2 = 16$

z = 4 , z=-4 , z=4i , z=-4i

ولذلك فان مجموعة الحل الكلية هي :

z = $4\sqrt{i}$ + $4\sqrt{i}$, z = -$4\sqrt{i}$ + $4\sqrt{i}$, z = $4\sqrt{i}$ - $4\sqrt{i}$, z = - $4\sqrt{i}$ - $4\sqrt{i}$

z = 4 , z = - 4 , z = 4i , z = - 4i

المثال – 17

اثبت انه اذا كان حقيقي العدد المركب Re z اكبر من صفر فان حقيقي مقلوبه $\text{Re}\,\frac{1}{z}$ ايضا اكبر من صفر

…………………………..

Let z = x + iy

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{1}{x+iy} \times \frac{x-i}{x-iy}$$

$$\text{So :}\ \frac{1}{z} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}\,i$$

Now :

x > 0 and

$$\mathbf{Re}\,\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} > 0 \ \ \textbf{always}$$

المثال – 18

اثبت انه اذا كان تخيلي العدد المركب Im z اكبر من صفر فان تخيلي مقلوبه $\text{Im}\,\frac{1}{z}$ اصغر من صفر

…………………………..

Let z = x + iy

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{1}{x+iy} \times \frac{x-iy}{x-iy}$$

$$\text{So :}\ \frac{1}{z} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}\,i$$

Now :

$y > 0$ and

$$\text{Im}\,\frac{1}{z} = -\frac{y}{x^2+y^2} < 0 \text{ always}$$

المثال – 19

اثبت انه اذا كان $z_1 + z_2$ عدد حقيقي سالب وفي نفس الوق $z_2\, z_1$ عدد حقيقي سالب ايضا فان z_1 و z_2 هما عددان حقيقيان

…………………………….

Let $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\, i$$

$$z_2\, z_1 = (x_1\, x_2 - y_1\, y_2) + (x_1\, y_2 + x_2\, y_1)\, i$$

$z_1 + z_2$ is a negative real number so :

$$y_1 + y_2 = 0 \text{ ....(1)}$$

$$x_1 + x_2 < 0 \text{ ....(1')}$$

$z_1\, z_2$ is a negative real number so :

$$x_1\, y_2 + x_2\, y_1 = 0 \text{ ....(2)}$$

$$x_1\, x_2 - y_1\, y_2 < 0 \text{ ....(2')}$$

From (1) :

$$y_1 = -\, y_2$$

Sub. in (2) :

$$x_1\, y_2 + x_2\, (-y_2) = 0$$

$$y_2(x_1 - x_2) = 0$$

Either $y_2 = 0$ or $x_1 = x_2$

Let $x_1 = x_2$ sub. in (2') :

$x_1{}^2 + y_1{}^2 < 0$ this is impossible

So $y_2 = 0$ and this gives $y_1 = 0$

وبالتالي فان z_1 و z_2 **هما عددان حقيقيان**

المثال – 20

خذ مجموعة من الاعداد العقدية وحاول ان توجد العلاقة بين حقيقي مجموع هذه الاعداد ومجموع حقيقياتها ونفس الشي بالنسبة الى التخيلي . اثبت هذه العلاقة رياضيا

....

ناخذ على سبيل المثال :

$z_1 = 3 + 2i$

$z_2 = 1 - 5i$

$z_3 = -7$

$z_4 = - 3i$

$z_5 = 2 + 7i$

$z_6 = 14 – 4i$

$z_7 = 8$

Sum of **Re** for all = 21

Sum of **Im** for all = -3

Sum of all = 21 – 3i

رياضيا يمكن اثبات ذلك كما يلي :

$$\text{Re} \sum z = \sum x$$

$$\text{But} \sum x = \sum Re$$

$$\text{Hence : } \mathbf{Re} \sum \boldsymbol{z} = \sum \boldsymbol{Re}$$

وبنفس الطريقة :

$$\text{Im} \sum z = \sum y$$

$$\text{But} \sum y = \sum Im$$

$$\text{Hence : } \mathbf{Im} \sum \boldsymbol{z} = \sum \boldsymbol{Im}$$