Deflection

* سوف يتم حساب مقدار النزول في نقطة معينة (deflection)
او مقدار زاوية الدوران (rotation) باستخدام طريقة
* Unit load Method [Virtual work method]

* ستخدم هذه الطريقة في انشأت :-

1. Beams
2. Frames
3. Truss
4. Composite

T section
Shear
balata

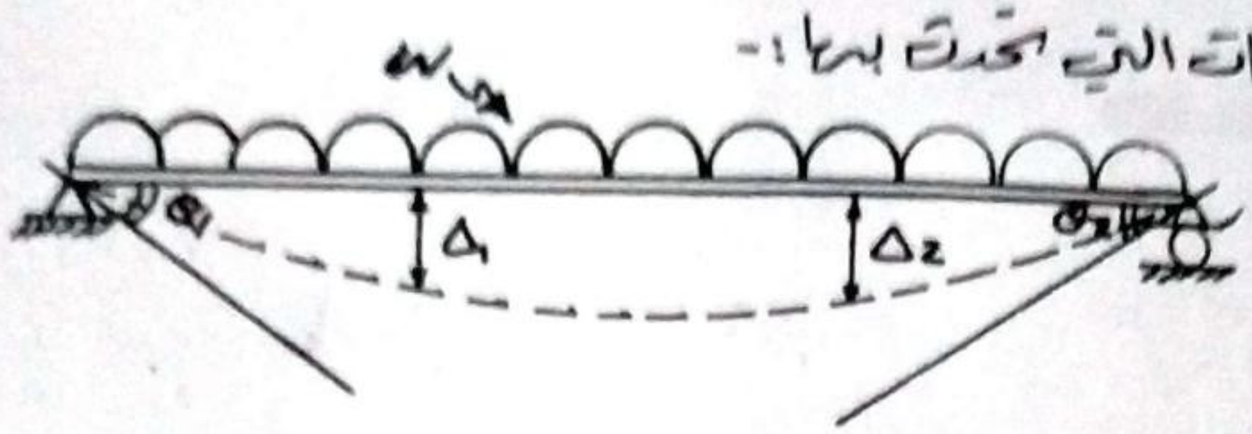
مكتب القمة
طباعة عامة - استنساخ
باب المعظم مجاور كلية الهندسة

* حيث لكل منشأ توجد قوانين خاصة لحساب التشوهات به .

Scanned by TapScanner

Deflections in Beams

* لنفرض ان لدينا العتبة المبينة في الشكل . فعند تسليط الاحمال عليها فان التشوهات التي تحدث بها :-



* لنفرض حساب هذه التشوهات من خلال .

$$\Delta = \sum \int \frac{M * m * dx}{EI} \quad \downarrow 1$$

$$\theta = \sum \int \frac{M * m * dx}{EI} \quad \circlearrowright 1$$

حيث :-

1- M : مقدار العزم الذي يظهر عند وجه القطع ولكن نتيجة تسليط الاحمال الخارجية الموجودة .

2- m : مقدار العزم الذي يظهر عند وجه القطع ولكن نتيجة تسليط قوة مركزة مقداره (1) [اذا كان المطلوب حساب deflec.]
أو عزم مركز مقداره (1) [اذا كان المطلوب حساب rotation] في المنقطة المطلوبة .

* الواضح من التعريف ان هنالك قطعتان سوف يتم عملها .
* ولغرض معرفة أماكن القطع كما يلي :-

a - يتم عمل قطع قبل القوة المركزة وبعدها .
b - يتم عمل قطع قبل العزم المركز وبعده .

Scanned by TapScanner

c- يتم عمل قطع قبل الحمل المنتشر وضمن الحمل المنتشر ومن ثم بعده
[هذا يعني ان الحمل المنتشر يحتاج الى ثلاث قطوعات].

d- يتم عمل قطع قبل المسند وبعده.

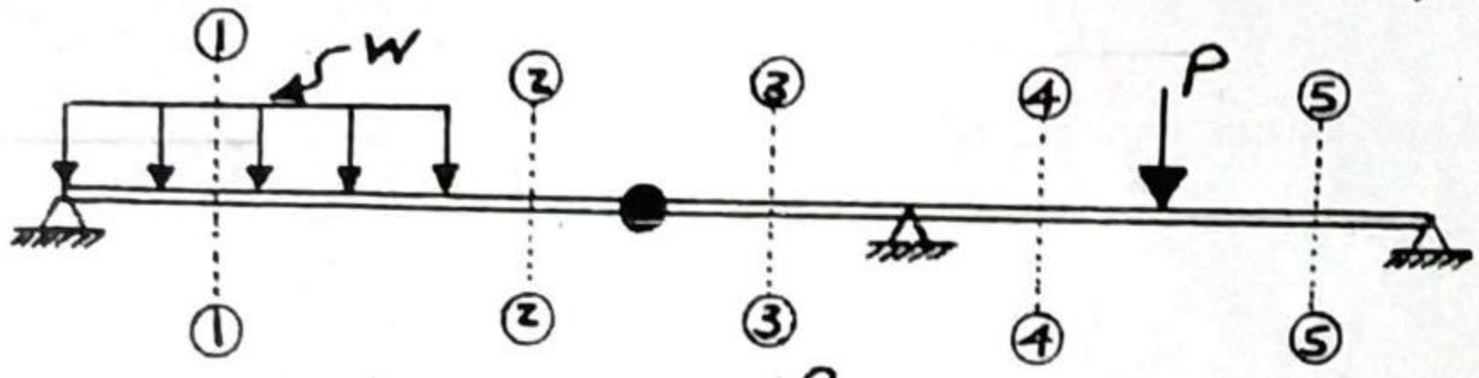
e- يتم عمل قطع قبل المفصل الداخلي [Internal hinge] وبعده.

f- يتم عمل قطع قبل نقطة التلاقي وبعدها.

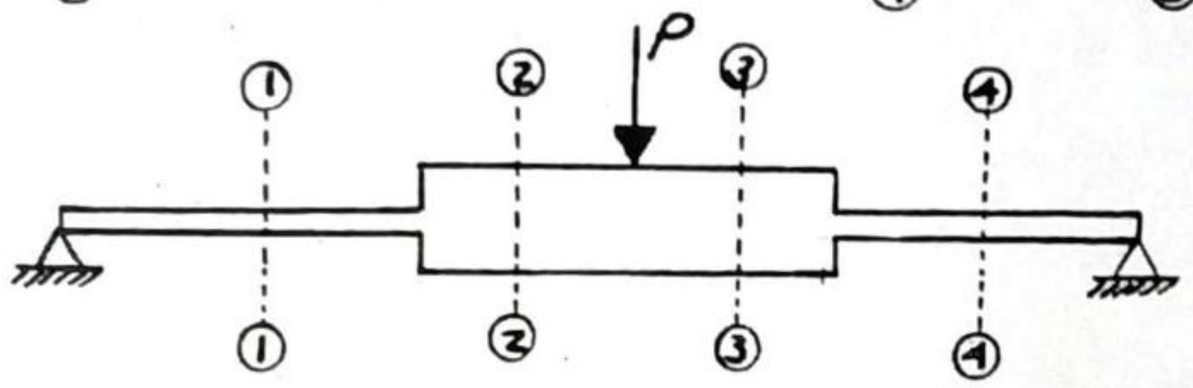
g- قبل نقطة تغير (I) وبعد نقطة التغير.

* ولغرض فهم عمل القطوعات سوف يتم أخذ الأمثلة الاتية :-

Ex :-



Ex :-



المكتبة الطلابية
سنابكة خاصة - الصناع
باب المعلم مجاور كلية الهندسة

* ملاحظات :-

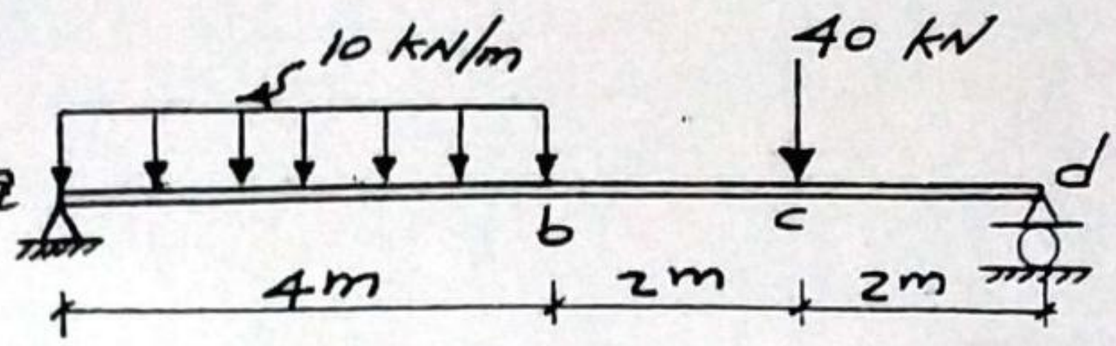
1. يجب ان تكون عدد قطوعات (M) هي نفسها عدد قطوعات (m).
2. في حساب (m) يجب أهمال جميع الأحمال الخارجية ويتم تسليط الحمل من قبلنا [حيث سوف يتم تسليط أما قوة مركزة او عزم مركز]
3. دائماً سوف تكون مسافة القطع مجهولة بدلالة (X). ويجب أن تنظلعه (X) عند احدى اسماء الجزء المقطوع.
4. عند وجود مفصل داخلي يفضل دائماً اخذ الجهة التي فيها هذا المفصل.
5. بالنسبة الى إتجاه (M) في القطع يتم وضعه في أي اتجاه يناسبنا ولكنه يجب ان يكون اتجاه (m) في ذلك القطع هو نفس اتجاه (M).

Scanned by TapScanner

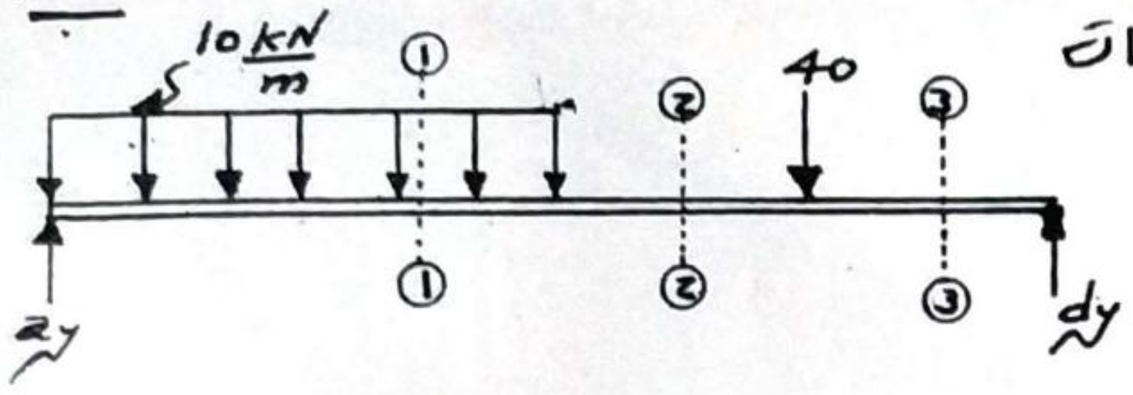
Ex:- Find the Vertical deflection at point (c)

if EI = const.

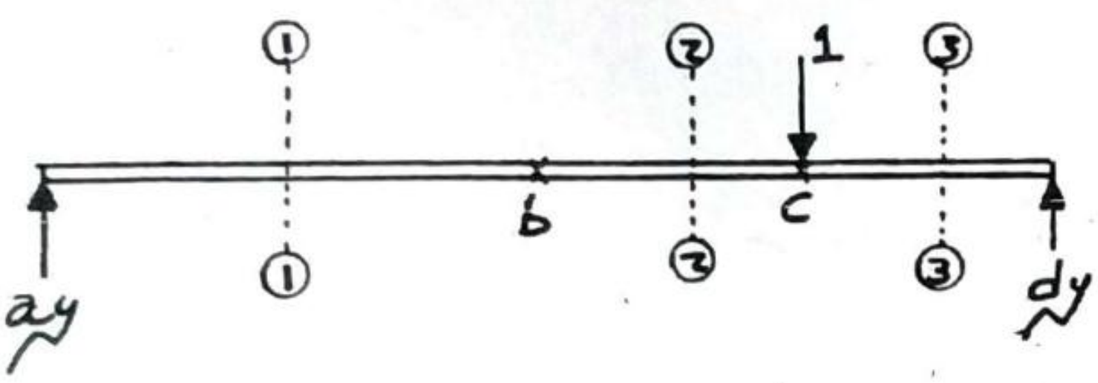
القطوع على عدد الاحرف



Sol.



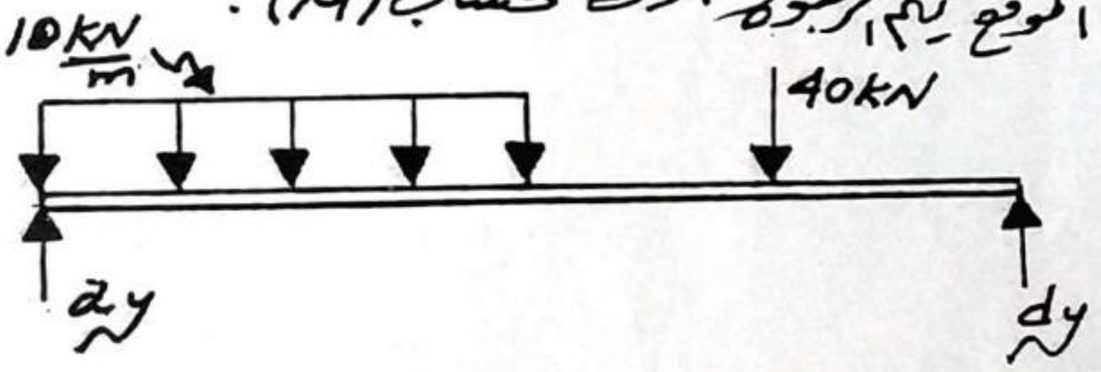
* أول خطوة في الحل يتم تحديد عدد قطوعات (M) والتي في هذا المثال هي ثلاث قطوعات.



* بعد تحديد قطوعات (M) يتم تحديد قطوعات (m) وذلك بأهمال جميع الاحمال الخارجية وتسليط قوة مركزة مقدارها (1) في نقطة (C).

* هنا في هذا الشكل نحتاج الى قطعين فقط. ولكن بسبب أن عدد قطوعات (M) هي ثلاث لذلك يجب عمل ثلاث قطوعات في (m) أيضاً.

* بعد التأكد من ان عدد قطوعات (M) هي نفسها عدد قطوعات (m) وبنفس الموقع يتم الرجوع الآن لحساب (M).



* To find M:-

* To find reaction:-

$\sum M_a = 0$ +)

$10 * 4 * \frac{4}{2} + 40 * 6 - d_y * 8 = 0 \Rightarrow d_y = 40 \uparrow$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow a_y - 10*4 - 40 + 40 = 0 \Rightarrow a_y = 40 \uparrow$

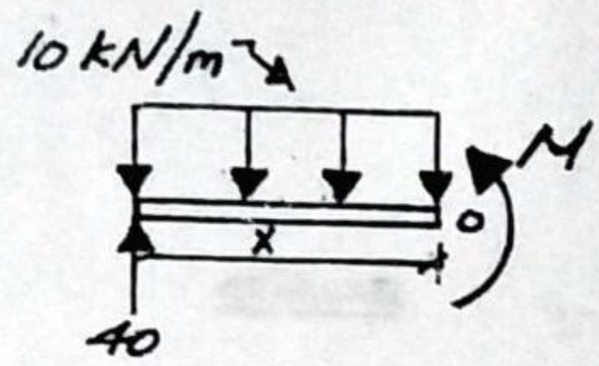
* بعد استخراج ردود الافعال التي نحتاجها يتم البدأ بعمل القطوعات ويتم دائماً اخذ الجهة السهلة من القطع.

مكتب التنسيب
طباعة عامة - استنساخ
باب المعظم مقابل كلية الهندسة

نكمل لدينا X فيين 0/8 n

Scanned by TapScanner

① - For part (ab) :-

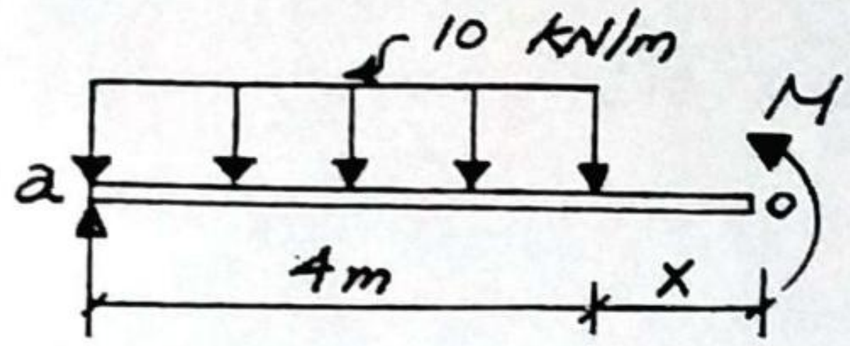


$\Sigma M_o = 0$

$40(x) - 10 * x * \frac{x}{2} - M = 0$

$\therefore$ $M = 40x - 5x^2$

② - For part bc :-

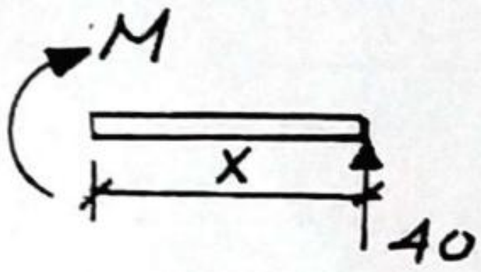


$\Sigma M_o = 0$

$40(4+x) - 10*4*(\frac{4}{2}+x) - M = 0$

$M = 160 + 40x - 80 - 40x \Rightarrow M = 80$

③ - For part cd :-

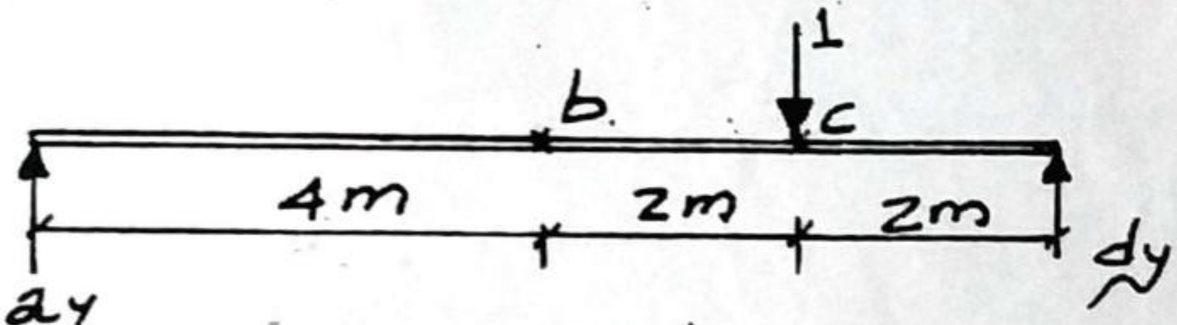


$\Sigma M_o = 0$

$M - 40(x) = 0 \Rightarrow M = 40x$

* الآن بعد الانتهاء من قطوعات (M) يتم البدء بقطوعات (m) حيث تعاد نفس الخطوات المذكورة في (M) ولكن الإختلاف فقط يكون في تأثير الأحمال.
[ويجب أخذ نفس المقطع التي تم أخذها في M].

* To find
* To find reaction :-

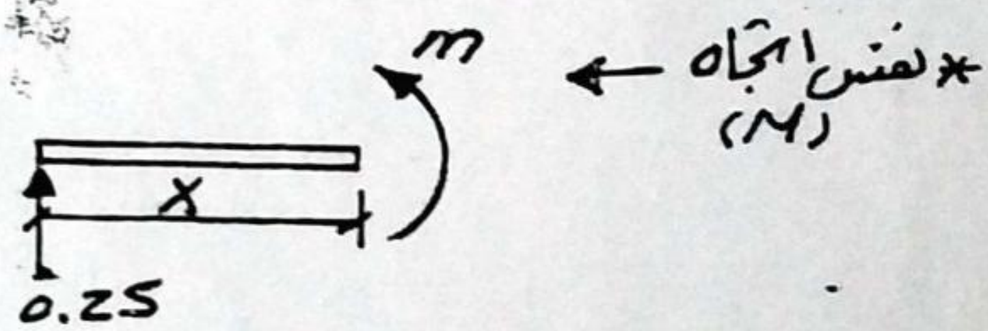


$\Sigma M_a = 0$

$1*6 - dy*8 = 0 \Rightarrow dy = 0.75 \uparrow$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow ay - 1 + 0.75 = 0 \Rightarrow ay = 0.25 \uparrow$

① - For part ab :-



$\Sigma M_o = 0$

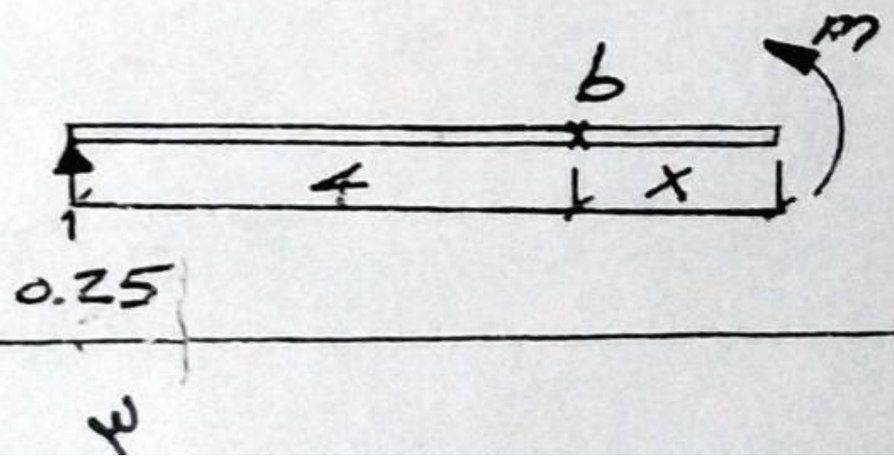
$0.25(x) - m = 0 \Rightarrow m = 0.25x$

② - For part bc :-

$\Sigma M_o = 0$

$0.25(4+x) - m = 0$

$m = 1 + 0.25x$

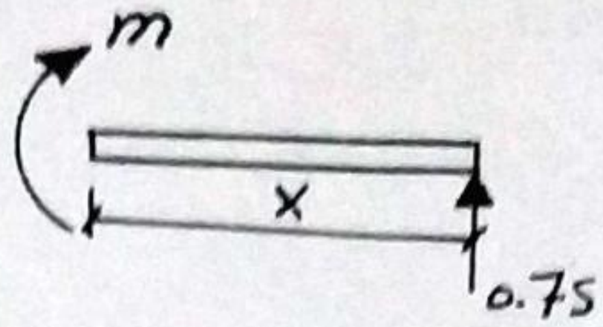


Scanned by TapScanner

③- for part cd :-

$\sum M_o = 0$

$m - 0.75(x) = 0 \Rightarrow (m = 0.75x)$



* بعد الانتهاء من حساب (m) يتم ترتيب الحل بالجدول طبعاً.

member	origin	Limit	EI	M	m
* يتم كتابة اسماء الاجزاء	* النقطة التي تنطلق منها (x)	* حدود التكامل وسوف تبدأ من الصفر دائماً لغاية لهول الجزء	* معامل (I) للجزء		

member	origin	Limit	EI	M	m
ab	a	$0 \rightarrow 4$	1	$40x - 5x^2$	$0.25x$
bc	b	$0 \rightarrow 2$	1	80	$1 + 0.25x$
cd	d	$0 \rightarrow 2$	1	$40x$	$0.75x$

* سوف يكون كل سطر عبارة عن تكامل وحده ومن ثم يتم جمع التكاملات

$\therefore \Delta c = \sum \int \frac{Mm\,dx}{EI}$

$$= \int_0^4 \frac{(40x - 5x^2)(0.25x)dx}{EI} + \int_0^2 \frac{(80)(1 + 0.25x)dx}{EI} + \int_0^2 \frac{(40x)(0.75x)dx}{EI}$$

$$= \frac{1}{EI}\left[\int_0^4 (10x^2 - 1.25x^3)dx + \int_0^2 (80 + 20x)dx + \int_0^2 (30x^2)dx\right]$$

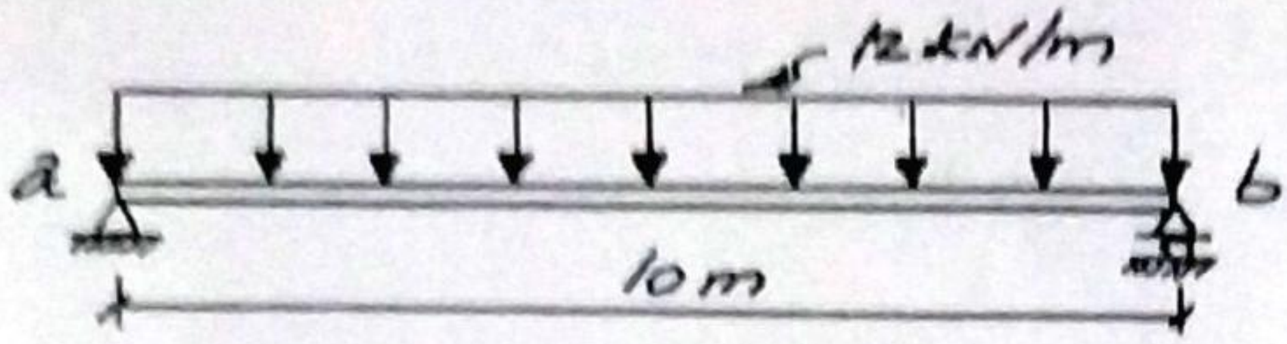
$$= \frac{1}{EI}\left[\left[\frac{10x^3}{3} - \frac{1.25x^4}{4}\right]_0^4 + [80x + 10x^2]_0^2 + [10x^3]_0^2\right]$$

$\Delta c = \frac{415.33}{EI} \downarrow$

* تم استنتاج ان اتجاه (Δc) الى الاسفل لانه عند تسليط القوة (1) تم تسليطها الى الاسفل والناتج كان موجباً لذلك يعني ان الازاحة باتجاه (1).

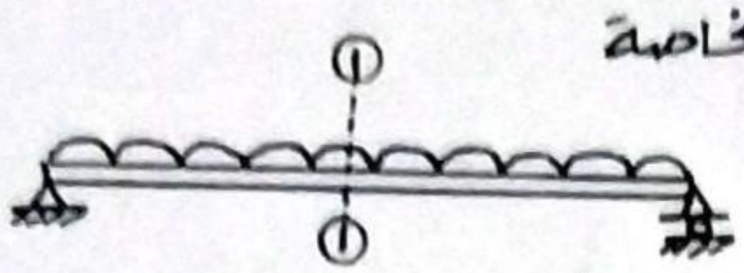
Scanned by TapScanner

Ex:- Find the rotation at point (a) for the beam.

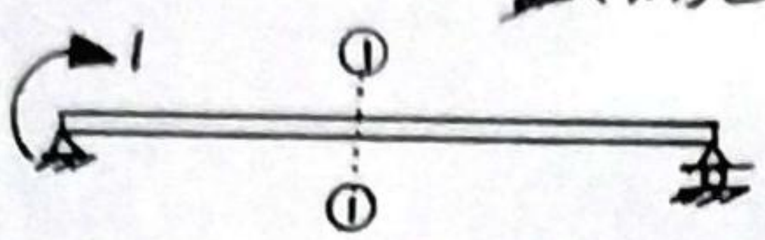


Sol:

* بالنسبة الى عدد المقطوعات الخاصة بـ (M) هو واحد فقط



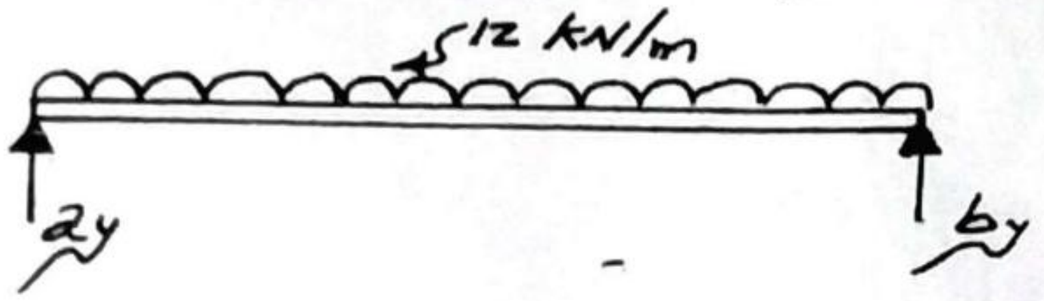
* بالنسبة الى عدد المقطوعات الى (m) هو



* أيضاً مقطع واحد فقط . لذلك بما أنه عدد مقطوعات (M) مساوية الى (m)
* الآن يتم حساب (M) .

* To find M:-
* To find reaction:-

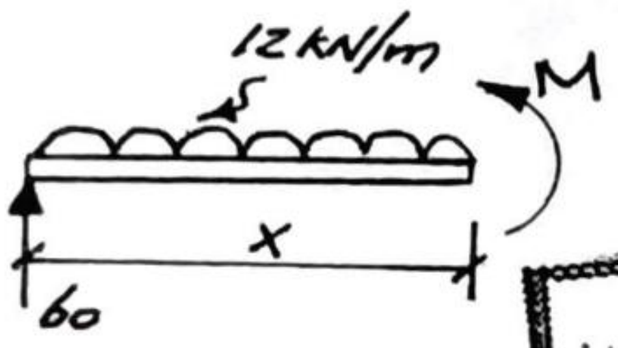
due to Sym.



$$a_y = b_y = \frac{12 * 10}{2} = 60 \uparrow$$

① for part ab :-

$$M = 60x - \frac{12x^2}{2}$$



مكتبة القمة
طباعة عالية - استنساخ
باب المعظم مجاور كلية الهندسة

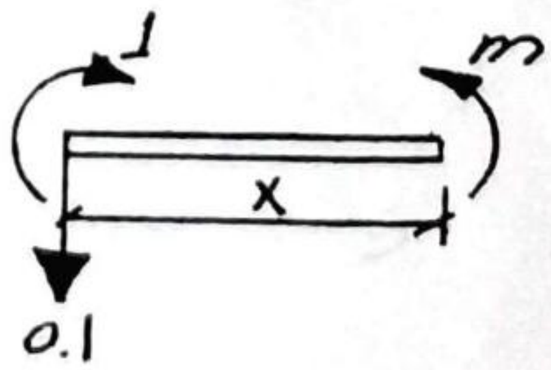
* To find M:-
* To find reaction:-

$$\Sigma M_a = 0$$

$$1 - b_y * 10 = 0 \Rightarrow b_y = 0.1 \uparrow$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow a_y + 0.1 = 0 \Rightarrow a_y = 0.1 \downarrow$$

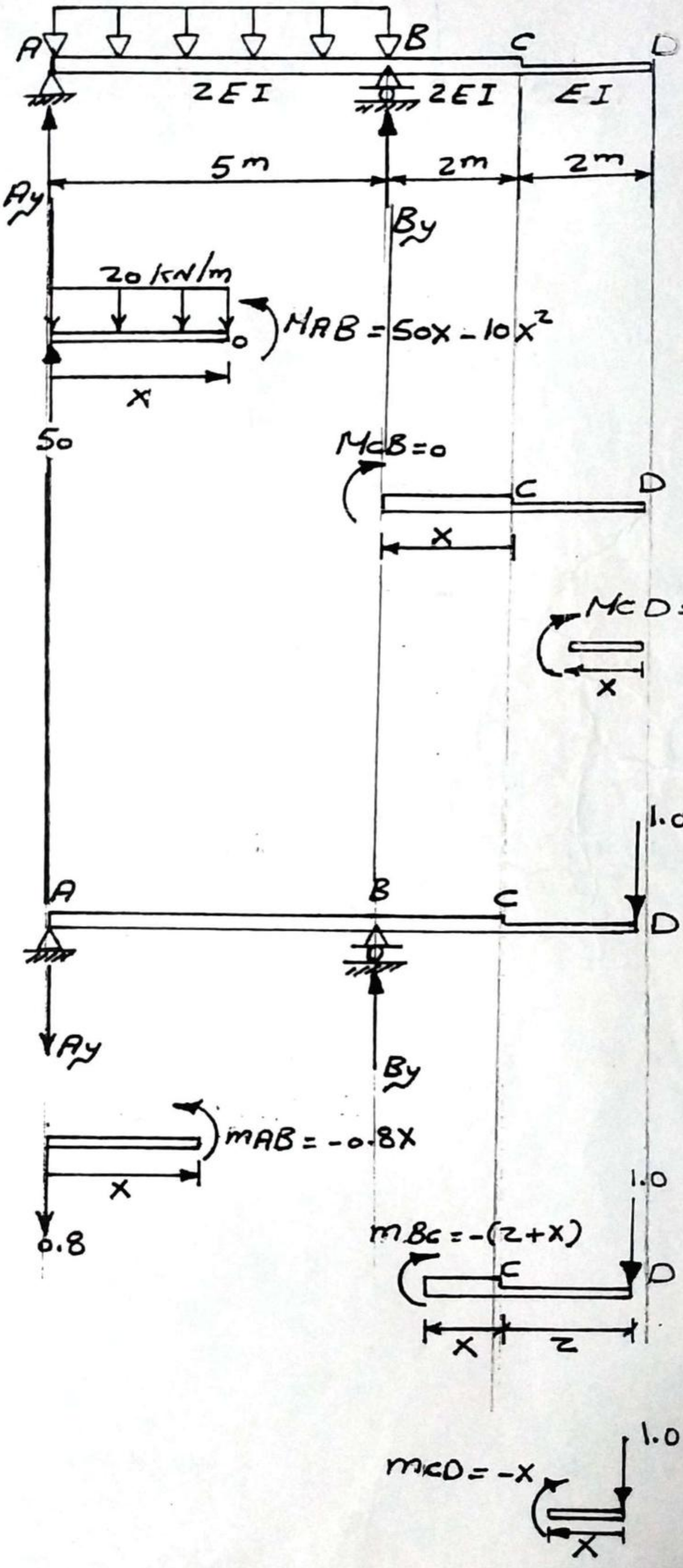
① for part ab :-



$$m = 1 - 0.1x$$

Scanned by TapScanner

Ex : By using unit-load method, Find the deflection in point D in the beam shown in fig.



Sol.

$\Sigma M_A = 0$ ⊕

$20*5*2.5 - B_y(5) = 0$

$B_y = 50\uparrow$

$\Sigma F_y = 0 \uparrow$

$A_y - 20*5 + 50 = 0 \Rightarrow A_y = 50\uparrow$

To Find (M):

For AB

For Bc

For CD

To Find (m):

$\Sigma M_A = 0$ ⊕

$1.0(9) - B_y(5) = 0$

$B_y = \frac{9}{5}\uparrow$

$\Sigma F_y = 0 \uparrow$ ⊕

$-A_y + \frac{9}{5} - 1 = 0$

$A_y = 0.8$

For AB

For Bc

For CD

Scanned by TapScanner

mem.	EI	origin	limit	M	m
AB	2EI	A	$0 \to 5$	$50x - 10x^2$	$-0.8x$
Bc	2EI	C	$0 \to 2$	0	$-(2+x)$
CD	EI	D	$0 \to 2$	0	$-x$

$$\Delta = \int \frac{M.m}{EI}\, dx$$

$$\Delta_D = \int_0^5 \frac{-0.8x\,(50x - 10x^2)}{2EI}\, dx + \int_0^2 \frac{0 * -(2+x)}{2EI}\, dx + \int_0^3 \frac{0 * -x}{EI}\, dx$$

$$\Delta_D = \frac{-0.8}{2EI} \int_0^5 (50x^2 - 10x^3)\, dx$$

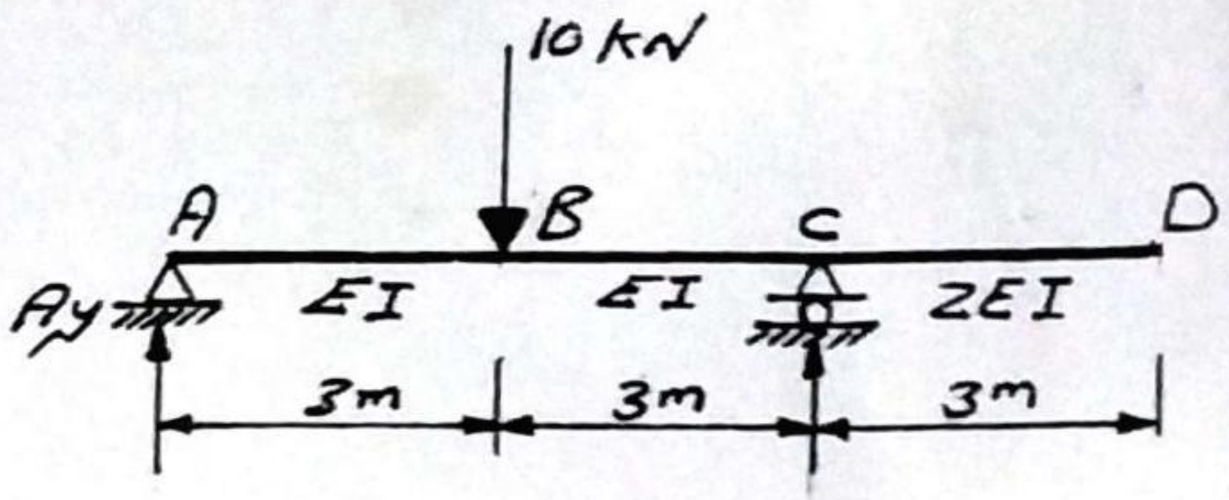
$$= \frac{-0.8}{2EI} \left[\frac{50}{3}x^3 - \frac{10}{4}x^4 \right]_0^5$$

$$= \frac{-0.8}{2EI} \left[\left(\frac{50}{3}(5)^3 - \frac{10}{4}(5)^4 \right) - (0) \right]$$

$$= \frac{208.33}{EI} = \frac{208.33}{EI} \uparrow$$

Scanned by TapScanner

Ex:- By using unit-load method, Find the deflection in point D in the beam shown in fig.



Sol.

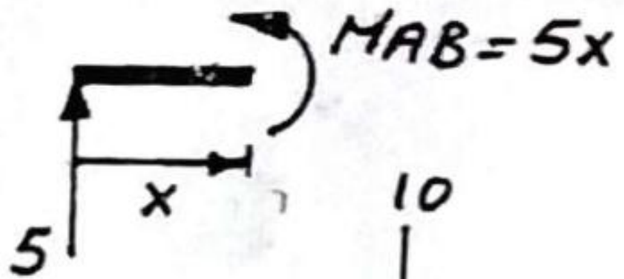
$\Sigma M_C = 0$ ⊕

$A_y(6) - 10(3) = 0$

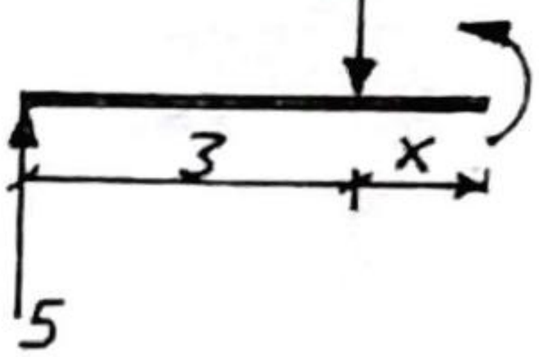
$A_y = 5 \uparrow$

To Find (M):

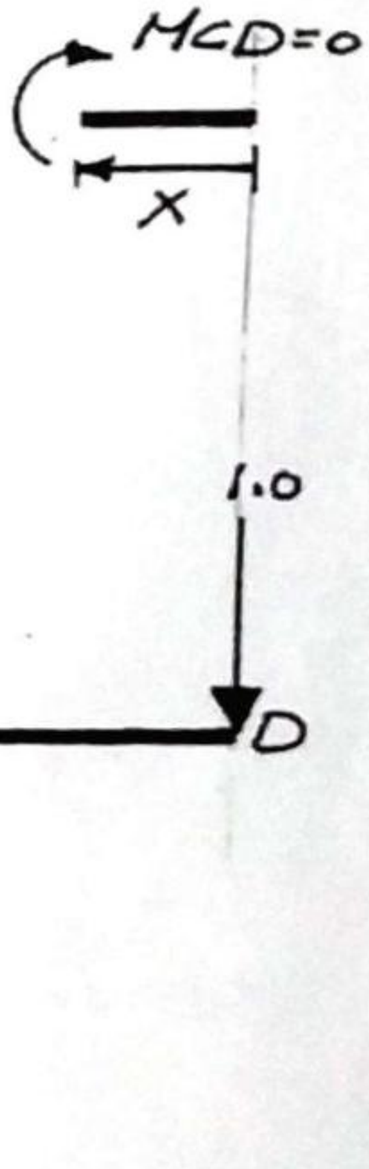
For AB:



For Bc:



For CD:



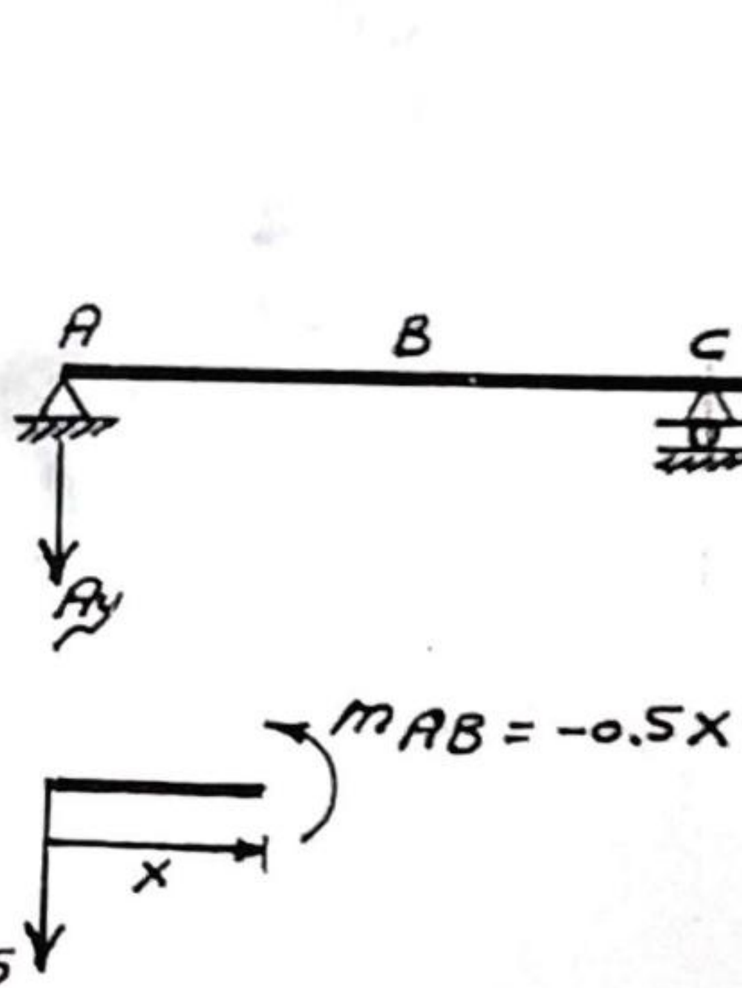
To Find (m):

$\Sigma M_C = 0$ ⊕

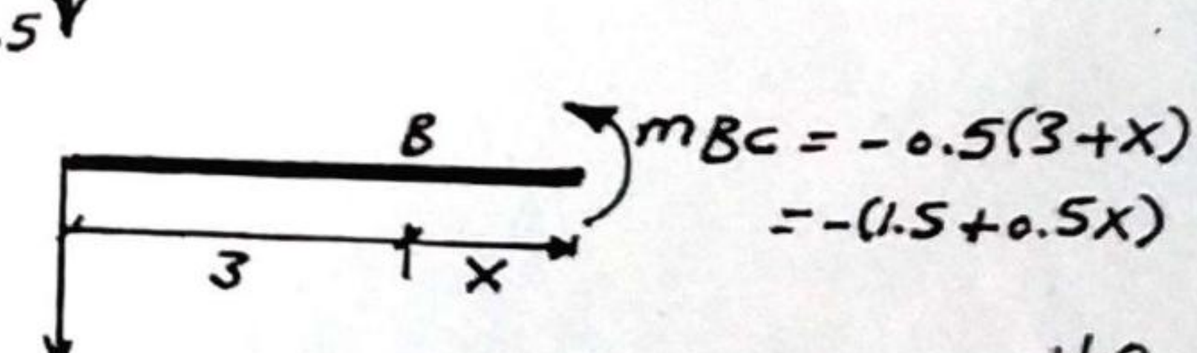
$1*3 - A_y(6) = 0$

$A_y = 0.5 \downarrow$

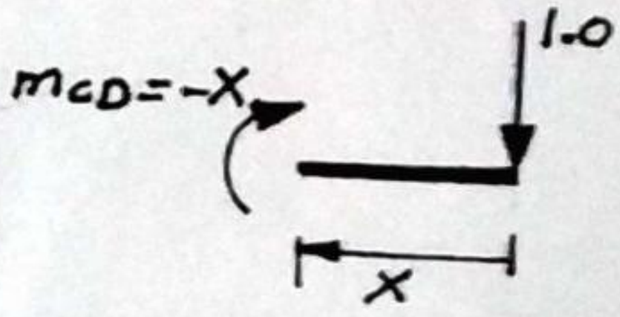
For AB:



For Bc:



For CD:



Scanned by TapScanner

mem.	EI	origin	Limit	M	m
AB	EI	A	0 → 3	5X	-0.5X
Bc	EI	B	0 → 3	15 - 5X	-(1.5 + 0.5X)
CD	2EI	D	0 → 3	0	-X

$$\Delta = \int \frac{M.m}{EI}\,dx$$

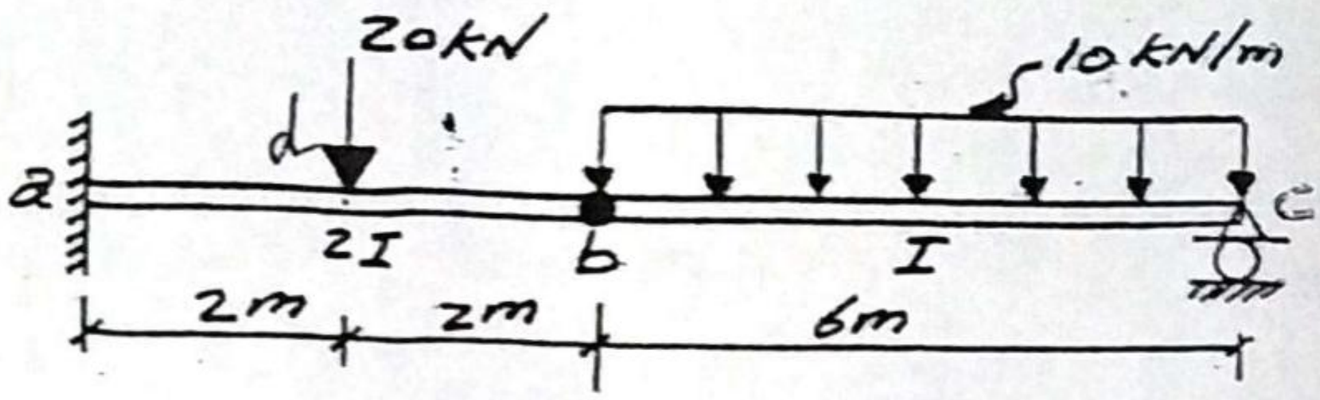
$$\Delta D = \int_0^3 \frac{5X * -0.5X}{EI}\,dx + \int_0^3 \frac{(15-5X) * -(1.5+0.5X)}{EI}\,dx + \int_0^3 \frac{0 * -X}{2EI}\,dx$$

$$= -\frac{2.5}{EI}\int_0^3 x^2\,dx - \frac{1}{EI}\int_0^3 (22.5 - 2.5x^2)\,dx$$

$$= -\frac{67.5}{EI} = \frac{67.5}{EI}\downarrow$$

Scanned by TapScanner

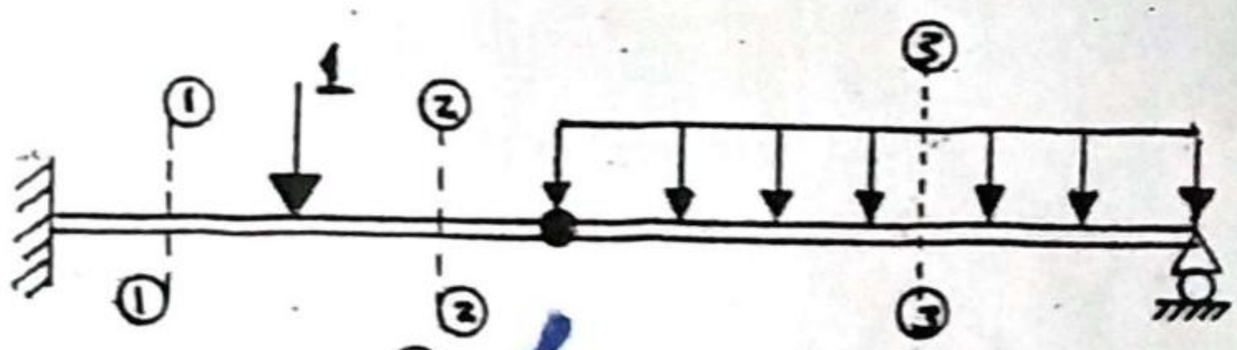
Ex:- Find θ_b and Δ_b for the beam shown?



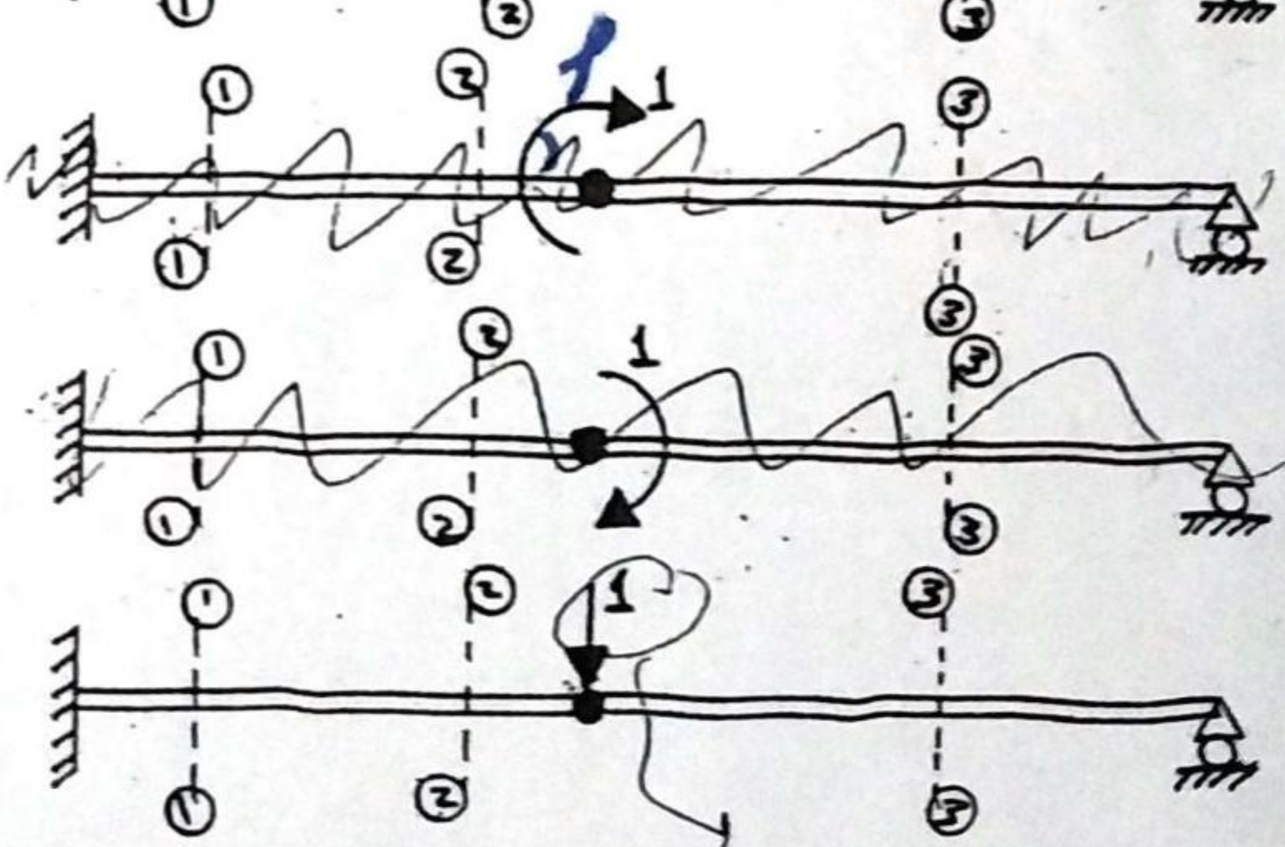
Sol.

* ملاحظة :- عدد (θ) في نقطة لمفصل الداخلي (Internal hinge) يساوي الى عدد الاضلاع المرتبطة بهذا (I.H).
* هذا يعني في سؤالنا هذا فأن عدد (θ) في نقطة (b) هي أثنان
* هذه الملاحظة خاصة فقط بنقطة (I.H) ولا تطبق في أي نقطة أخرى [أي أن عدد (θ) في بقية النقاط هي واحدة فقط].
* أما أسماء هذه (θ) فيمكن تسميتها كما يلي :-
  1. $(\theta_b)_L$ 2. $(\theta_b)_R$
* أو قديم تسميتها بدلالة الأضلاع المتصلة بها:-
  1. θ_{ba} 2. θ_{bc}
* لغرض التأكد من عدد المعطوفات:-

Find M ⇐



Find m_1 (θ_{ba}) ⇐

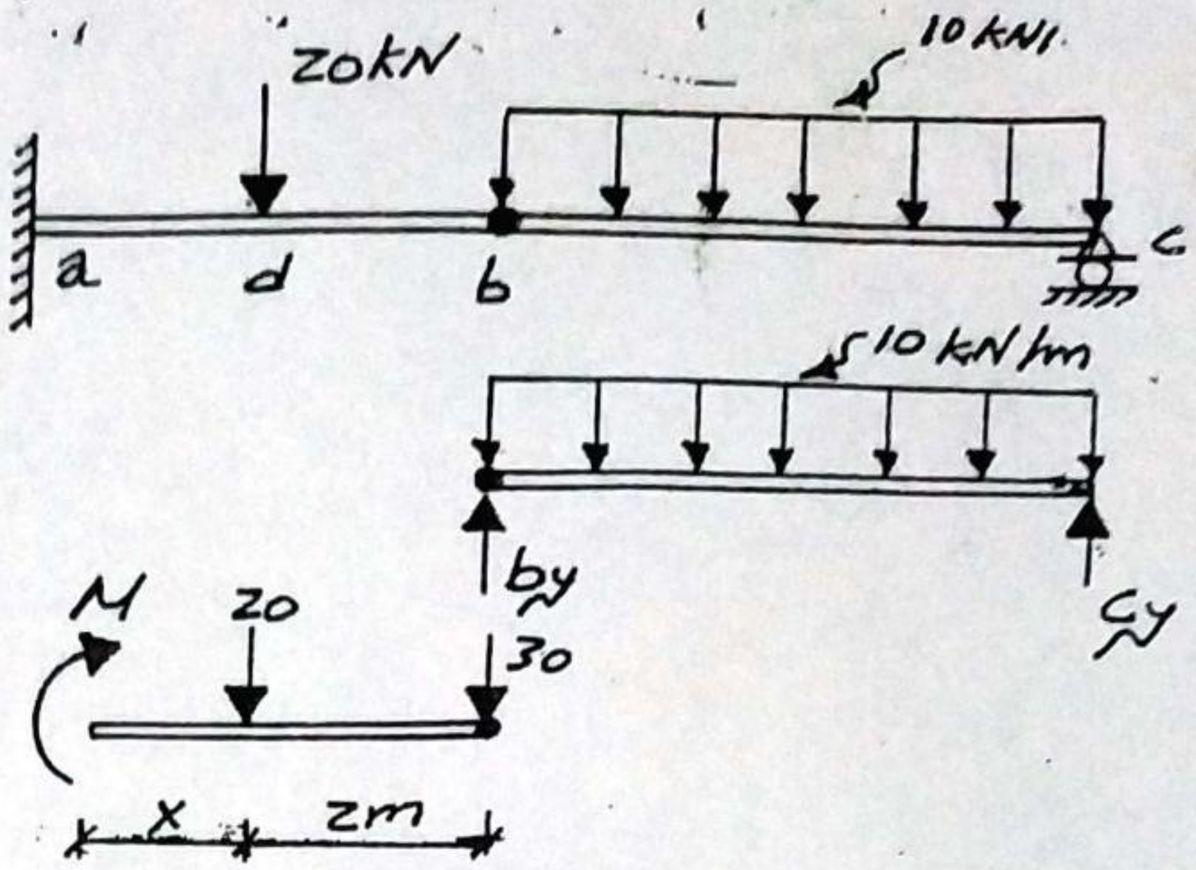


Find m_2 (θ_{bc}) ⇐

Find m_3 (Δ_b) ⇐

عند فصل العضو القوة الموجودة على المسند
القوة تكون على النقطة الاكثر مجاهيل

* To find M :-
* To find reaction :-



* for part bc :-

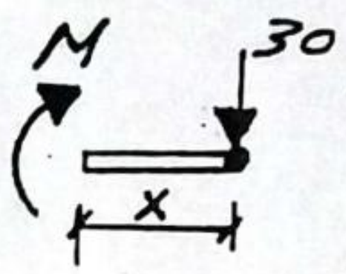
$b_y = c_y = \frac{10*6}{2} = 30 \uparrow$

① for part ad :-

$M = -20(x) - 30(2+x)$

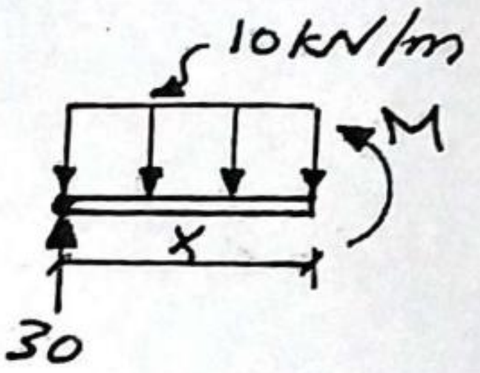
$M = 50x - 60$

② for part db :-



$M = -30x$

③ for part bc :-



$M = 30x - \frac{10x^2}{2}$

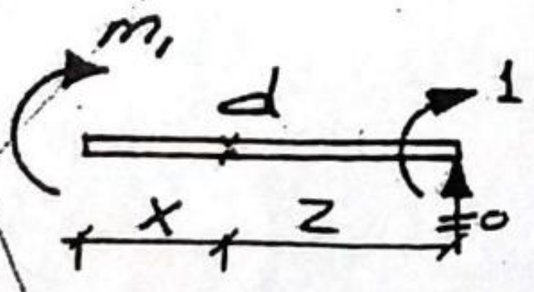
$M = 30x - 5x^2$

* To find M_1 (Oba) :-
* To find reaction :-
* for part bc :-

$\sum M_c = 0$

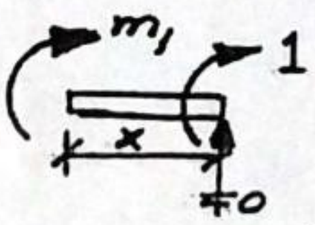
$\therefore b_y = 0 \Rightarrow c_y = 0$

① for part ad :-



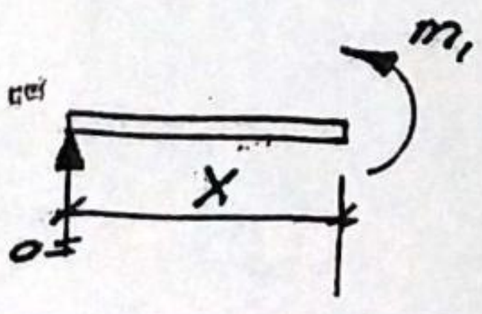
$m_1 = -1$

② for part db :-



$m_1 = -1$

③ for part bc :-



$m_1 = 0$

Scanned by TapScanner

member	origin	limit	EI	M	m_1	m_2	m_3
ad	d	$0 \to 2$	2	$-50x-60$	-1	$\frac{x+2}{6}$	$-(x+2)$
db	b	$0 \to 2$	2	$-30x$	-1	$\frac{x}{6}$	$-x$
bc	b	$0 \to 6$	1	$30x-5x^2$	0	$1-\frac{x}{6}$	0

$$\theta_{ba} = \Sigma \int \frac{M m_1 dx}{EI}$$

$$= \int_0^2 \frac{(-50x-60)(-1)dx}{2EI} + \int_0^2 \frac{(-30x)(-1)dx}{2EI} + 0$$

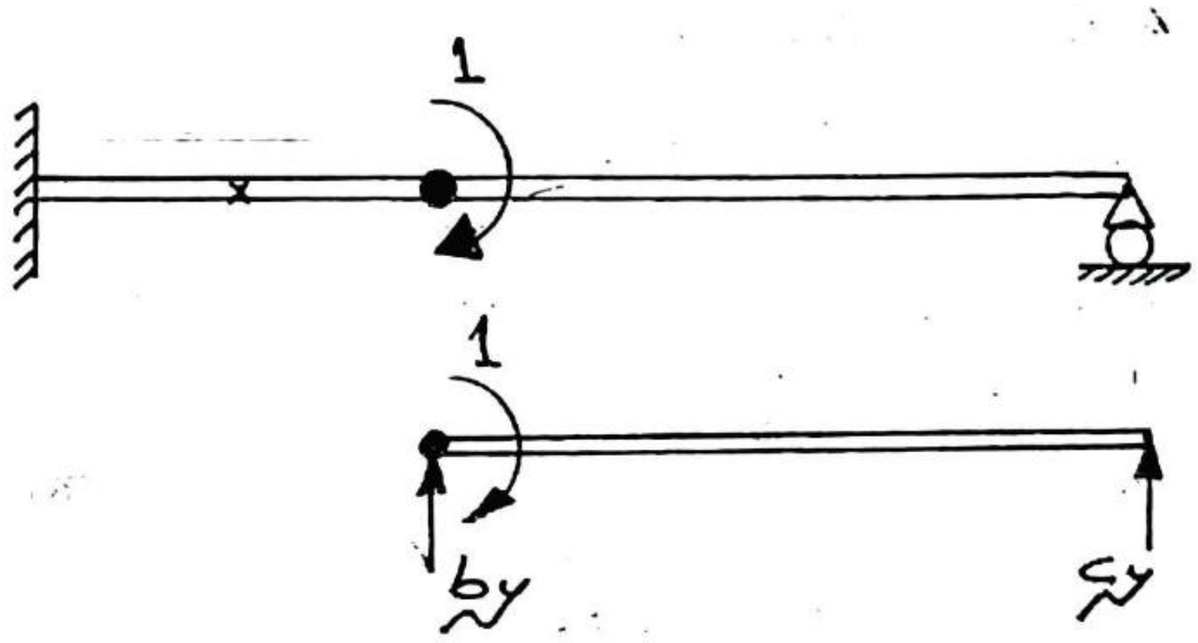
$$= \frac{1}{2EI}\left[\int_0^2 (50x+60)dx + \int_0^2 30x\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{2EI}\left[[25x^2+60x]_0^2 + [15x^2]_0^2\right]$$

$$\theta_{ba} = \frac{140}{EI} \text{ rad}$$

* To find (θ_{bc}) M_2 :-

* To find reaction :-



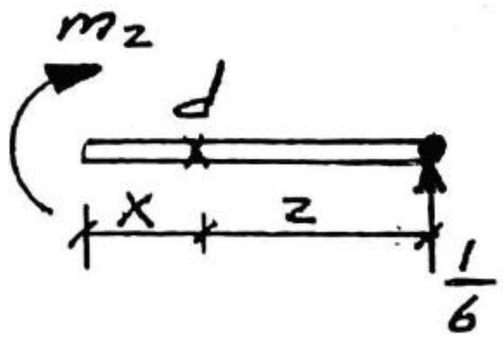
* for part bc :-

$\Sigma M_c = 0$

$1 + by * 6 = 0$

$$by = \frac{1}{6} \uparrow$$

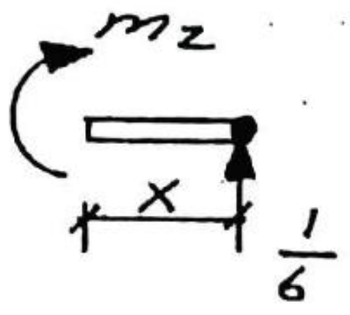
① for part ad :-



$$m_2 = \frac{1}{6} * (x+2)$$

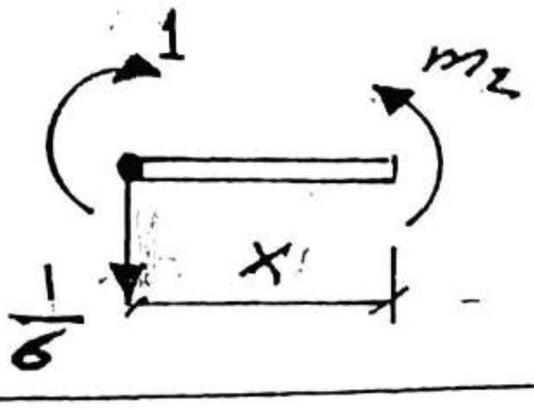
$$m_2 = \frac{x+2}{6}$$

② for part db :-



$$m_2 = \frac{x}{6}$$

③ for part bc :-



$$m_2 = 1 - \frac{x}{6}$$

Scanned by TapScanner

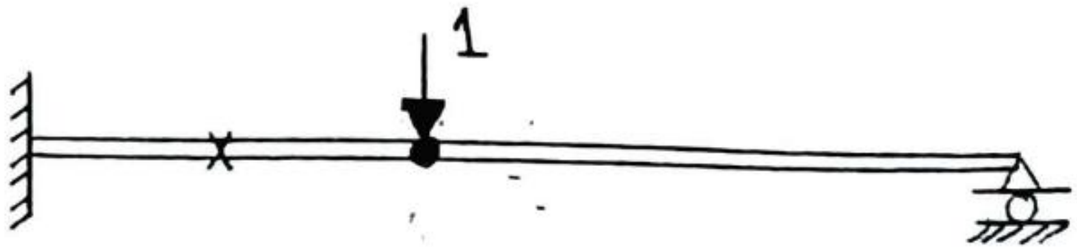
$$\therefore \theta_{bc} = \sum \int \frac{M m_z \, dx}{EI}$$

$$= \int_0^2 \frac{(-50x - 60)\left(\frac{x+2}{6}\right) dx}{2EI} + \int_0^2 \frac{(-30x)\left(\frac{x}{6}\right) dx}{2EI} + \int_0^6 \frac{(30x - 5x^2)\left(1 - \frac{x}{6}\right) dx}{EI}$$

$$= \frac{1}{6EI}\left[\int_0^2 \frac{(-50x^2 - 160x - 120) dx}{2} + \int_0^2 (-15x) dx + \int_0^6 (180x - 60x^2 + 5x^3) dx\right]$$

$$= \frac{1}{6EI}\left[\left[-\frac{25}{3} - 40x^2 - 60x\right]_0^2 + \left[-5x^3\right]_0^2 + \left[90x^2 - 20x^3 + 1.25x^4\right]_0^6\right]$$

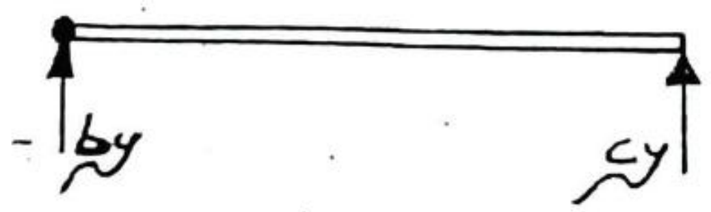
$$\theta_{bc} = \frac{25.56}{EI} \text{ rad}$$



* To find M_3 (Δb) :-
* To find reaction :-
* For part bc :-

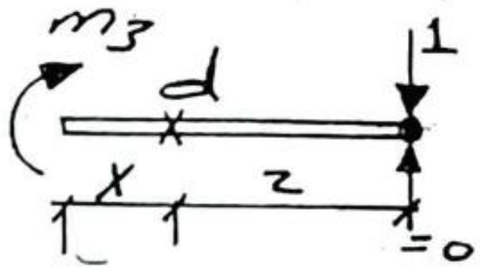
$\sum M_c = 0$

$b_y = 0$



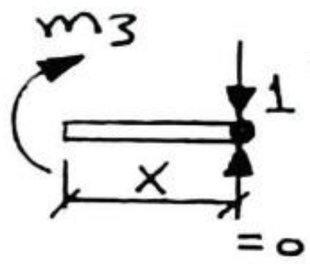
① For part ad :-

$m_3 = -(x+2)$



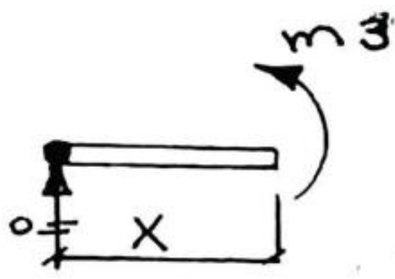
② For part db :-

$m_3 = -x$



③ For part bc :-

$m_3 = 0$



$$\therefore \Delta b = \sum \int \frac{M m_3 \, dx}{EI}$$

$$= \int_0^2 \frac{(-50x - 60)(-(x+2))dx}{2EI} + \int_0^2 \frac{(-30x)(-x)dx}{2EI} + 0$$

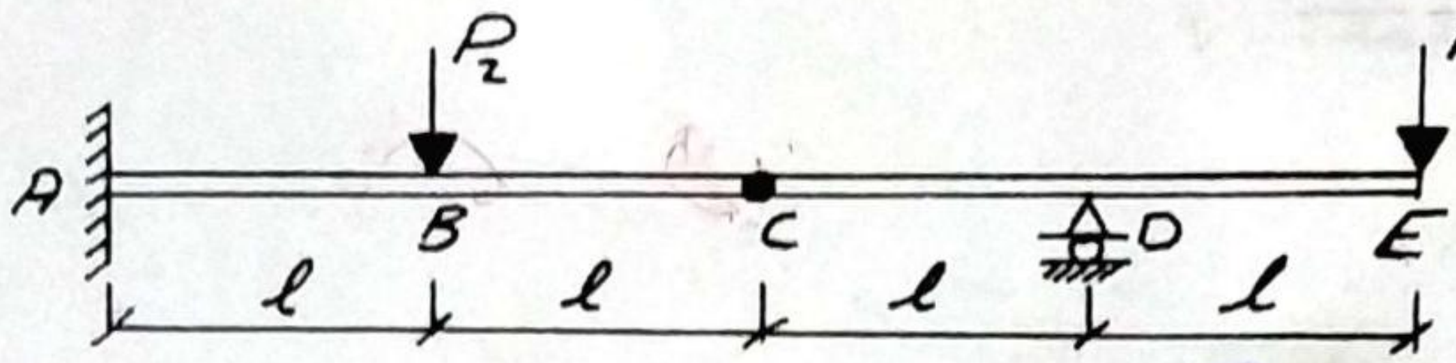
$$= \frac{1}{2EI}\left[\int_0^2 (50x^2 + 160x + 120) dx + \int_0^2 (30x^2) dx\right]$$

$$= \frac{1}{2EI}\left[\left[\frac{50}{3}x^3 + 80x + 120x\right]_0^2 + \left[10x^3\right]_0^2\right]$$

$$\Delta b = \frac{386.67}{EI}$$

Scanned by TapScanner

Ex:- For the beam shown find (P_1/P_2) to make the deflection at (c) equal to Zero. Assume EI = Cons



H.W/5

Sol.

* في هذا النوع من المسائل الذي تكون فيه مثلاً أحدى القوى مجهولة أو أحدى المسافات مجهولة ويتم اعطاء قيمة للتشوه في نقطة معينة سوف يتم اعتبار ان هذا التشوه هو المطلوب ومن ثم حل السؤال بصورة طبيعية وكتابة معادلة التشوه المعلوم وبعد كتابة معادلة التشوه سوف يكون طرف لتكامل المجهول ويتم تعويضه قيمة التشوه لاستخراج هذا المجهول.

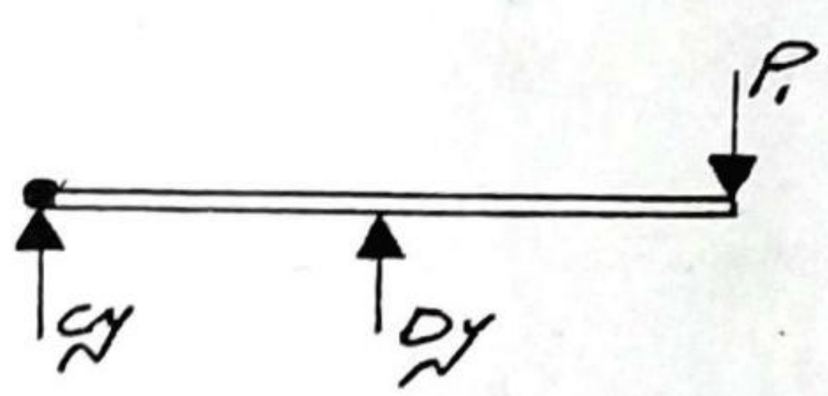
* To find M:-

* To find reaction:-

* for part CDE

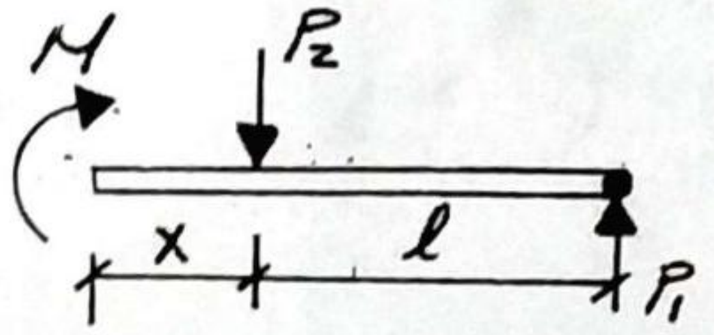
$\sum M_D = 0$

$C_y * l + P_1 * l = 0 \Rightarrow C_y = P_1 \downarrow$



① for part AB:-

$M = P_1(l+x) - P_2(x)$

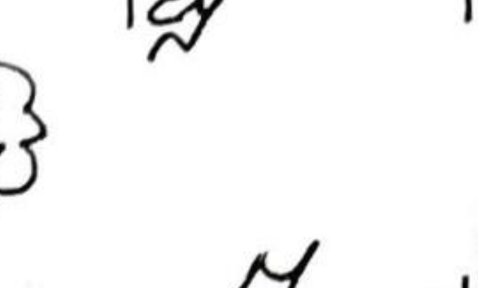


② for part Bc:-

$M = P_1(x)$

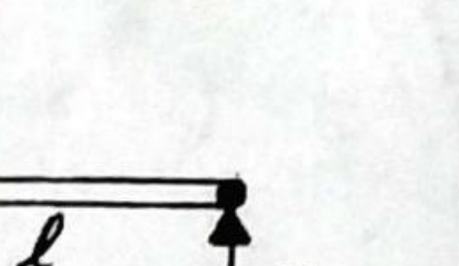
③ for part CD:-

$M = -P_1(x)$



④ for part DE:-

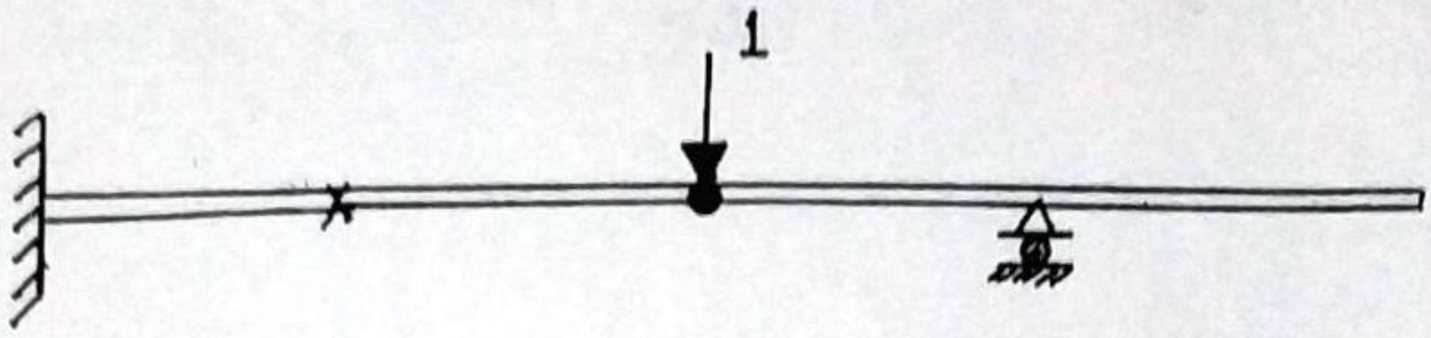
$M = -P_1(x)$



Scanned by TapScanner

* To find m (ΔC):-

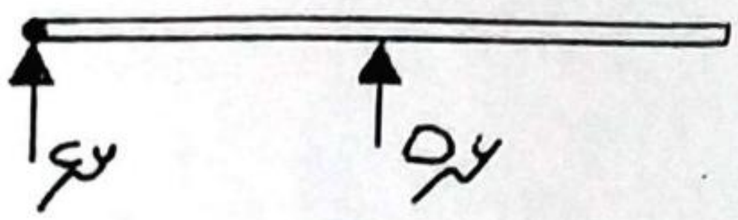
* To find reaction:-



* For part CDE :-

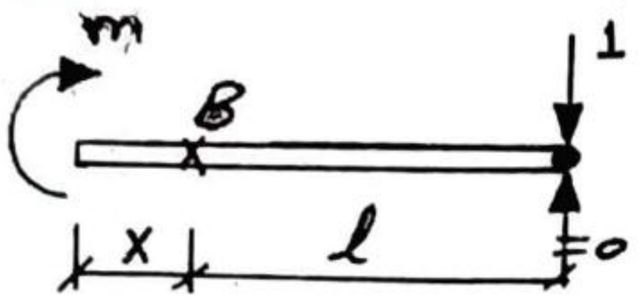
$\Sigma M_D = 0$

$C_y = 0$



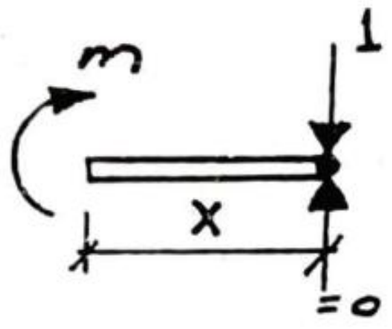
① For part AB :-

$m = -(l + x)$



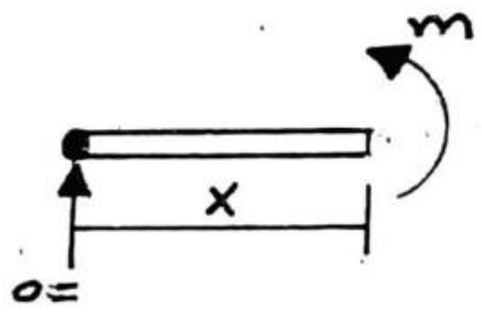
② For part Bc :-

$m = -x$



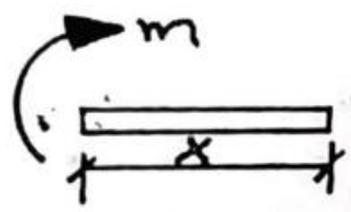
③ For part CD :-

$m = 0$



④ For part DE :-

$m = 0$



member	origin	Limit	EI	M	m
AB	B	$o \to l$	1	$P_1(l+x) - P_2 x$	$-(l+x)$
Bc	C	$o \to l$	1	$P_1 x$	$-x$
CD	C	$o \to l$	1	$-P_1 x$	0
DE	E	$o \to l$	1	$-P_1 x$	0

Scanned by TapScanner

$$\therefore \Delta c = \sum \int \frac{M m \, dx}{EI}$$

$$= \int_0^{\ell} \frac{(P_1(\ell + x) - P_2 x) + (-\ell - x)\,dx}{EI} + \int_0^{\ell} \frac{(P_1 x)(-x)\,dx}{EI} + 0 + 0$$

$$= \frac{1}{EI}\left[\int_0^{\ell} \left[P_1(-\ell^2 - 2x\ell - x^2) + P_2(\ell x - x^2)\,dx + \int_0^{\ell} (-P_1 x^2)\,dx\right]\right]$$

$$= \frac{1}{EI}\left[P_1\left[-\ell^2 x - \ell x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\ell} + P_2\left[\frac{\ell x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right]_0^{\ell} + \left[\frac{P_1 x^3}{3}\right]_0^{\ell}\right]$$

$$\Delta c = \frac{1}{EI}\left[P_1\left(-\ell^3 - \ell^3 - \frac{\ell^3}{3}\right) + P_2\left(\frac{\ell^3}{2} + \frac{\ell^3}{3}\right) - \frac{P_1 \ell^3}{3}\right]$$

$\therefore \Delta c = 0$ ← معطاة في السؤال

$$\therefore 0 = \frac{1}{EI}\left[-\frac{7}{3} P_1 \ell^3 + \frac{5}{6} P_2 \ell^3 - \frac{P_1 \ell^3}{3}\right]$$

$$0 = \frac{\ell^3}{EI}\left[-\frac{8}{3} P_1 + \frac{5}{6} P_2\right]$$

$$\therefore \quad -\frac{8}{3} P_1 + \frac{5}{6} P_2 = 0 \qquad \div P_2$$

$$-\frac{8}{3} * \frac{P_1}{P_2} + \frac{5}{6} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{P_1}{P_2} = \frac{5}{16}$$

Scanned by TapScanner