جبر الاعداد العقدية

- هناك اعداد حقيقية لا يمكن التعبير عنها كنسبة بين عددين صحيحين مثل $\sqrt{2}$ هذه يمكننا التعبير عنها بالصيغة :

$$\mathbf{a + b\,\sqrt{2}}$$

ان هذه الصيغة تحقق ما يلي :

عند الجمع (او الطرح) الناتج ياخذ نفس الصيغة ايضا :

$$\mathbf{(a + b\,\sqrt{2}\,) + \ (c + d\,\sqrt{2}\,) = (\ a{+}c\ ) + (\ b{+}d\ )\,\sqrt{2}}$$

عند الضرب الناتج ايضا :

$$\mathbf{(a + b\,\sqrt{2}\,) + \ (c + d\,\sqrt{2}\,) = (\ ac + 2bd\ ) + (\ bc{+}ad\ )\,\sqrt{2}}$$

عند القسمة الناتج ايضا : (باستعمال المرافق) :

$$\frac{\mathrm{a} + \mathrm{b}\,\sqrt{2}}{\mathrm{c} + \mathrm{d}\,\sqrt{2}} = \frac{\mathrm{a} + \mathrm{b}\,\sqrt{2}}{\mathrm{c} + \mathrm{d}\,\sqrt{2}} \times \frac{\mathrm{c} - \mathrm{d}\,\sqrt{2}}{\mathrm{c} - \mathrm{d}\,\sqrt{2}} = \frac{\mathrm{ac} - 2\mathrm{b}}{\mathrm{c}^2 - 2\mathrm{d}^2} + \frac{bc - a}{\mathrm{c}^2 - 2\mathrm{d}^2}\,\sqrt{2}$$

- ان صيغة العدد $\mathbf{a + b\,\sqrt{2}}$ تحقق خواص الجمع والاشتراك والتوزيع تماما مثل اي عدد حقيقي
- هذا ينطبق على اعداد تم استخراجها كنهايات **limits** مثل **e** و π
- **الان ...ما هو العدد المركب .**

هو تعبير عبارة عن جزئين بالشكل **a+bi** حيث **a** و **b** حقيقيان بينما **i** يساوي $\sqrt{\mathbf{-1}}$

- **متى يتساوى عددان مركبان؟**

اذا تساوت مكوناتهما الحقيقية .

مثلا **a+bi** يساوي **c+di** فقط اذا كان :

$$\mathbf{a = c \quad and \quad b = d}$$

- **كيف نجمع او نطرح عددين مركبين ؟**

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

- **كيف نضرب عددين مركبين ؟**

$$(a + bi) \times (c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i$$

- **كيف نقسم عددين مركبين ؟**

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di} \times \frac{c-di}{c-di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\, i$$

- **لماذا سمي i عدد تخيلي imaginary وكيف يكتب ؟**

لانه من المستحيل ايجاد حل حقيقي للمعادلة : (وامثالها)

$$x^2 = -1$$

وهو يشبه $\sqrt{2}$ من حيث الحاقه في جزء ثاني من الاعداد المركبة ولكنه ابسط بكثير .

وهكذا يسمى الجزء الاول من الاعداد المركبة حقيقيا وباختصار **Re** والجزء الخيالي **Im**

بنفس الطريقة فبالنسبة للعدد **3 + 2i** وعادة نسمي العدد المركب **z** :

$$z = 3 - 2i$$

$$Re (z) = 3 , \quad Im (z) = -2$$

- **لماذا تسمى مجموعة الاعداد المركبة ؟**

تسمى مجموعة كل الاعداد المركبة **C** مع ملاحظة مهمة :

لا يوجد معنى للسؤال : اي العددين المركبين اكبر من الثاني ؟ لانه لا يوجد ترتيب للاعداد المركبة ordering .

المثال - 1

اوجد مجموعة الحل للمعادلة :

$$x^2 +3 = 0$$

………………………………………..

$x^2 +3 = 0$ **gives :** $x^2 = -3$

So : $x = \sqrt{3 \times (-1)} = \sqrt{3}\, i$

ونلاحظ ان $-\sqrt{3}\, i$ ايضا هو حل للمعادلة لان :

$$(-\sqrt{3}\, i)^2 = -3$$

المثال - 2

هل تنطبق خاصية التبادل على مجموعة الاعداد المركبة **C** في الجمع والضرب والقسمة ؟ اثبت ذلك

……………………………………..

- بالنسبة للجمع نعم الاعداد المركبة تبادلية :

$$z_1 = a + bi\,,\ z_2 = c + di$$
$$z_1 + z_2 = (a+c) + (b+d)i$$
$$z_2 + z_1 = (c+a) + (d+b)i$$

But : $(a+c) = (c+a)$ **and :** $(b+d) = (d+b)$

Hence : $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

- بالنسبة للضرب نعم الاعداد المركبة تبادلية :

$$z_1 = a + bi\,,\ z_2 = c + di$$
$$z_1 \times z_2 = (a + bi) \times (c + di)$$
$$= ac + adi + bci - bd$$
$$= (ac - bd) + (ad + bc)i$$
$$z_2 \times z_1 = (c + di) \times (a + bi)$$
$$= ac + cbi + adi - bd$$
$$= (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Hence : $z_1 \times z_2 = z_2 \times z_1$

- بالنسبة للقسمة كلا الاعداد المركبة ليست تبادلية :

لو طبقنا نفس الخطوات السابقة على القسمة فسوف نجد :

$$z_1 = a + bi\ ,\ \ z_2 = c + di$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+b\,d}{c^2+d^2} + \frac{bc-a\,d}{c^2+d^2}\,i$$

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{c+di}{a+bi} = \frac{ac+b\,d}{a^2+b^2} + \frac{ad-bc}{a^2+b^2}\,i$$

Hence :

$$\frac{z_1}{z_2} \neq \frac{z_2}{z_1}$$

المثال - 3

اثبت ان عملية الطرح $z_1 - z_2$ هي معكوس لعملية الجمع $z_1 + z_2$ ثم اثبت ان عملية القسمة معكوس لعملية الضرب وذلك كله للاعداد المركبة

....

- بالنسبة لعمليتي الطرح والجمع :

$$z_1 = a + bi\ ,\ \ z_2 = c + di$$

$$z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$$

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$$

$$\text{Let } z_3 = z_1 - z_2$$

الان اذا نقلنا z_2 الى الطرف الايسر اذا كان الطرح عكس الجمع يصبح لدينا :

$$z_3 + z_2 = z_1$$

علينا ان نثبت صحة هذه العبارة :

$$z_3 + z_2 = (a - c) + (b - d)i + c + di = a + bi = z_1$$

العبارة صحيحة

بالنسبة لعمليتي القسمة والضرب :

$$z_1 = a + bi\ ,\ \ z_2 = c + di$$

$$z_1 \times z_2 = (a + bi) \times (c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+b\,d}{c^2+d^2} + \frac{bc-a\,d}{c^2+d^2}\,i$$

$$\text{Let } z_3 = \frac{z_1}{z_2}$$

الان اذا نقلنا z_2 الى الطرف الايسر فاذا كان الضرب عكس القسمة يصبح لدينا

$$z_3 \times z_2 = z_1$$

علينا الان ان نثبت صحة هذه العبارة :

$$\left[\frac{ac+b\,d}{c^2+d^2} + \frac{bc-a\,d}{c^2+d^2}i\right] \times (c+di) = \frac{ac+b\,d+(bc-ad)i}{(c+di)(c-di)} \times (c+di)$$

$$= \frac{a(c-di)+b(c+di)}{c-di}$$

$$= a + \frac{b\,(d+ci)}{c-di} \times \frac{c+di}{c+di}$$

$$= a + \frac{b\,(cd+d^2i+c^2i-cd)}{c^2+d^2}$$

$$= a + \frac{b\,i\,(c^2+d^2)}{c^2+d^2} = a + bi = z_1$$

العبارة صحيحة

المثال - 4

ما هي قيم z_1 و z_2 التي تحقق المعادلة :

$$z_1 \times z_2 = 0$$

……………………………………..

الضرب معكوس القسمة للأعداد المركبة كما راينا في المثال السابق لذلك اذا نقلنا z_2 الى الطرف الايمن نجد :

$$z_1 = \frac{0}{z_2} = 0$$

وبنفس الطريقة نجد :

$$z_2 = \frac{0}{z_1} = 0$$

المثال - 5

اوجد قيمة الكسر التالي بالصيغة $a + bi$:

$$\frac{(4 + 2i) - (1 + 3i)}{2 - 5i}$$

....

يتضمن المثال عمليتي الجمع والطرح اضافة للقسمة :

$$\frac{(4 + 2i) - (1 + 3i)}{2 - 5i} = \frac{3 - i}{2 - 5i} = \frac{3 - i}{2 - 5i} \times \frac{2 + 5i}{2 + 5i} = \frac{11 + 13i}{4 + 25} = \frac{11}{29} + \frac{13}{29} i$$

المثال - 6

اكتب بصيغة $a + ib$ العدد المركب لكل مما يلي :

$$-2\left(\frac{i}{3}\right)$$

$$-2\left(\frac{i}{3}\right) = -\frac{2}{3} i = 0 - \frac{2}{3} i$$

$$\text{e.g } a = 0 , b = -\frac{2}{3}$$

$$(9 - i) - (4 + 2i)$$

$$(9 - i) - (4 + 2i) = 5 + i$$

$$\frac{5}{i}$$

$$\frac{5}{i} = \frac{5}{i} \times \frac{i}{i} = \frac{5i}{-1} = -5i$$

$$\text{e.g } a = 0 , b = -5$$

$$\frac{7i + 4}{3i}$$

$$\frac{7i+4}{3i} = \frac{7i+4}{3i} \times \frac{i}{i} = \frac{-7+4i}{-3} = \frac{7}{3} - \frac{4}{3}\,\mathbf{i}$$

$$\frac{-2+7\,i}{1+3\,i}$$

$$\frac{-2+7\,i}{1+3\,i} = \frac{-2+7\,i}{1+3\,i} \times \frac{1-3\,i}{1-3\,i} = \frac{19+}{10} = \frac{19}{10} + \frac{13}{10}\,\mathbf{i}$$

$$\frac{5}{i} + \frac{i}{5}$$

$$\frac{5}{i} + \frac{i}{5} = \frac{25-1}{5i} = \frac{24}{5i} = \frac{24}{5i} \times \frac{i}{i} = \frac{24}{-5} = \frac{-24}{5}\,\mathbf{i}$$

$$\mathbf{i^2\,(i-1)}$$

$$i^2\,(i-1) = -i - 1$$

$$\mathbf{(1-i^2)\,i}$$

$$(1-i^2)\,i = i + i = 2i$$

المثال – 7

هل يعتبر $-i$ حلا للمعادلة : $x^2 = -1$ ؟

....

نعم وذلك كما يلي :

$$(-i)^2 = -i \times -i = -1$$

المثال – 8

بين ان $Re(iz) = -\,Im\,z$ لاي عدد z

....

$$z = x+iy$$

$$iz = i(x+iy) = ix - y = -y + ix$$

$$Re(iz) = -y$$

$$Im\ z = y \quad \text{so} \quad -Im\ z = -y$$

Hence : $\mathbf{Re(iz) = - Im\ z}$

المثال – 9

اذا كان k عددا صحيحا فاثبت كلا مما يلي :

$$\boldsymbol{i^{-4k} = 1}$$

ان 4k تولد دورة كل 4 اعداد ابتداء من $k = 1$ فما فوق وفي كل مرة يكون i^{4k} يساوي 1 تماما مثلا :

$$K=1 \quad , 4k = 4 , i^{4k} = i^{4} = 1$$

$$K=2 \quad , 4k = 8 , i^{4k} = i^{8} = 1$$

$$K=3 \quad , 4k = 12 , i^{4k} = i^{12} = 1 \quad \text{.....and so on ...}$$

لذلك يكون :

$$\boldsymbol{i^{-4k} = \frac{1}{i^{4k}} = \frac{1}{1} = 1}$$

$$\boldsymbol{i^{4k+1} = i}$$

$$i^{4k+1} = i^{4k}\ (i)$$

$$= 1\ (i) = \mathbf{i}$$

$$i^{4k+2} = -1$$

$$i^{4k+2} = i^{4k}\,(i^2) = 1\,(-1) = -1$$

$$i^{4k+3} = -i$$

$$i^{4k+3} = i^{4k}\,(i^2) = 1\,(-1)\,i = -i$$

المثال – 10

اوجد بطريقة سريعة كلا مما يلي :

$$i^{9}$$

من المثال السابق وجدنا :

$$i^{4k+1} = i$$

Let k = 2 , so :

$$i^{9} = i$$

$$i^{42}$$

من المثال السابق وجدنا :

$$i^{4k+2} = -1$$

Let k = 10 , so :

$$i^{42} = -1$$

$$i^{-103}$$

من المثال السابق وجدنا :

$$i^{4k+3} = -i$$

Let k = 25 ,   so :

$$\boldsymbol{i^{-103}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{i^{103}}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{-i}} = \mathbf{i}$$