



Ministry of Higher Education and Scientific Research
Al-Mustaqbal University College Department of
Chemical Engineering and petroleum Industrials

Mathematics II

2nd Stage

Lecturer: Rusul Ahmed Hashim

2023-2024

2. Gamma function:

تعرف دالة جاما كالآتي:

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{n-1} dt \quad (n > 0) \quad (1)$$

ونلاحظ أن الدالة $e^{-t} t^{n-1}$ عند ∞ تؤول إلى الصفر لأي قيمة عددية لـ n وعليه لا تكون هناك صعوبات علمية عند $t \rightarrow \infty$ بينما في الجزء السفلي توجد $t \rightarrow 0$ نجد أن $e^{-t} \cong 1$ وعليه تصبح المعادلة (1) على الصورة

$$\Gamma(n) = \int_0^c t^{n-1} dt + \int_c^{\infty} e^{-t} t^{n-1} dt = \left[\frac{1}{n} t^n \right]_0^c + \int_c^{\infty} e^{-t} t^{n-1} dt$$

وعليه إذا كان الجزء الأول من الناتج عدد فيجب علينا اختيار $n > 0$ حتى لا ينعدم المقام .

بعض النظريات والخواص الهامة

نظرية ١:

$$\Gamma(1) = 1$$

البرهان:

من تعريف $\Gamma(n)$ نضع $n=1$ فنحصل على

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = \left[-e^{-t} \right]_0^{\infty}$$

$$\Gamma(1) = 1 \quad (3)$$

نظرية ٢:

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$$

البرهان :

في المعادلة (1) بتحريك كل $n \rightarrow n+1$ نحصل على

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^n dt$$

بالتكامل بالتجزئىء بأخذ $u = t^n$ $e^{-t} dt = dv$, نحصل على

$$\Gamma(n+1) = \left[-e^{-t} t^n \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (-e^{-t}) n t^{n-1} dt$$

كما نلاحظ انعدام الجزء الأول من النتيجة السابقة فنحصل على

$$\Gamma(n+1) = n \int_0^{\infty} e^{-t} t^{n-1} dt$$

$$\Gamma(n+1) = n \Gamma(n) \quad (4)$$

ملاحظات :

(1) العلاقة $\Gamma(n+1) = n \Gamma(n)$ تسمى بالصيغة التكرارية لدالة جاما .

(2) يمكن تعميم دالة جاما لقيم $n < 0$ (للأعداد الحقيقية غير الصحيحة) باستخدام الصيغة السابقة على الصورة :

$$\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n}$$

نظرية 3 :

لأي عدد صحيح موجب

$$\Gamma(n+1) = n!$$

البرهان:

من خلال النظرية (٢) و (4) مع تكرار تحريك n بالمقادير $n-3, n-2, n-1$ وهكذا نجد أن

$$\begin{aligned}\Gamma(n+1) &= n(n-1)\Gamma(n-1) \\ &= n(n-1)(n-2)\Gamma(n-2) \\ &= n(n-1)(n-2)(n-3)\dots 2 \cdot 1\Gamma(1)\end{aligned}$$

وباستخدام (3) نحصل على العلاقة

$$\Gamma(n+1) = n! \quad (5)$$

نتيجة ١:

إذا كان $n=0$ فإن

$$0! = \Gamma(0+1) = \Gamma(1) = 1$$

نظرية ٤:

$$\Gamma(n) = 2 \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2n-1} dt$$

البرهان:

باستخدام التعويض $t = u^2$ ومنه نجد أن $dt = 2u du$ و على ذلك فإن

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} e^{-u^2} (u^2)^{n-1} (2u du)$$

وبالتالي نحصل على

$$\Gamma(n) = 2 \int_0^{\infty} e^{-u^2} u^{2n-1} du \quad (6)$$

ولكن من نظرية (٤)

$$\Gamma(n+m) = 2 \int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{2(n+m)-1} dr$$

وعليه نجد أن

$$\Gamma(n)\Gamma(m) = 2\Gamma(n+m) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-1}\theta \sin^{2m-1}\theta d\theta$$

وعليه نجد أن

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-1}\theta \sin^{2m-1}\theta d\theta = \frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{2\Gamma(n+m)} \quad (8)$$

وهذه النظرية مفيدة في العمليات الإحصائية المستخدم فيها ما يسمى بدالة الكثافة وغيرها. مثال على ذلك عند

وضع $n = \frac{1}{2}$ نجد أن

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{\infty} e^{-u^2} du \quad (7)$$

نظرية ٥:

يمكن الربط بين الدوال المثلثية ودالة جاما كالآتي:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-1}\theta \cdot \sin^{2m-1}\theta d\theta = \frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{2\Gamma(n+m)}$$

$$(iii) \frac{\Gamma(3)\Gamma(2.5)}{\Gamma(5.5)} = \frac{2!(1.5)(0.5)\Gamma(0.5)}{(4.5)(3.5)(2.5)(1.5)(0.5)\Gamma(0.5)} = \frac{2!}{\left(\frac{9}{2}\right)\left(\frac{7}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)} = \frac{16}{315}.$$

$$(iv) \frac{6\Gamma\left(\frac{8}{3}\right)}{5\Gamma\left(\frac{7}{3}\right)} = \frac{6 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{5\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} = \frac{4}{3}.$$

نظرية ٦:

$$\Gamma(n)\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin \pi n}$$

نتيجة:

عندما $n = \frac{1}{2}$ فإن :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \pi$$

امثلة محلولة

مثال ١:

احسب

$$(i) \frac{\Gamma(6)}{2\Gamma(3)}$$

$$(ii) \frac{\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})}$$

$$(iii) \frac{\Gamma(3)\Gamma(2.5)}{\Gamma(5.5)}$$

$$(iv) \frac{6\Gamma(\frac{8}{3})}{5\Gamma(\frac{2}{3})}$$

الحل:

$$(i) \frac{\Gamma(6)}{2\Gamma(3)} = \frac{5!}{2 \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2 \cdot 2!} = 30$$

$$(ii) \frac{\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{\Gamma(\frac{3}{2}+1)}{\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{\frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{\frac{3}{2}\Gamma(\frac{1}{2}+1)}{\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{3}{2}$$

و بالتالي فإن

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

وهي نفس النتيجة التي حصلنا عليها سابقاً

مثال ٢:

أوجد قيمة

$$(i) \Gamma(\frac{-1}{2})$$

$$(ii) \Gamma(\frac{-5}{2})$$

الحل:

$$\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n}$$

$$n = \frac{-1}{2} \text{ بوضع}$$

$$(i) \Gamma(\frac{-1}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{-1}{2}+1)}{\frac{-1}{2}} = -2\Gamma(\frac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi}$$

$$n = \frac{-5}{2} \text{ أيضاً بوضع}$$

$$(ii) \Gamma(\frac{-5}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{-3}{2})}{(\frac{-5}{2})}$$

$$\therefore \Gamma(\frac{-3}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{-1}{2})}{(\frac{-3}{2})}$$

$$\therefore \Gamma(\frac{-1}{2}) = -2\sqrt{\pi}$$

وعليه نجد أن

$$\Gamma(\frac{-5}{2}) = (\frac{-2}{5})(\frac{-2}{3})(-2\sqrt{\pi}) = \frac{8}{15}\sqrt{\pi}$$

مثال ٣:

احسب التكاملات الآتية:

$$(i) \int_0^{\infty} x^3 e^{-x} dx$$

$$(ii) \int_0^{\infty} x^6 e^{-2x} dx$$

$$(iii) \int_0^{\infty} \sqrt{y} e^{-y^3} dy$$

الحل:

$$(i) \int_0^{\infty} x^3 e^{-x} dx = \int_0^{\infty} x^{4-1} e^{-x} dx = \Gamma(4) = 3!$$

$$(ii) \int_0^{\infty} x^6 e^{-2x} dx,$$

نأخذ الفرض $u = 2x$, $du = 2 dx$ و على فإن

$$\int_0^{\infty} x^6 e^{-2x} dx = \int_0^{\infty} \left(\frac{u}{2}\right)^6 e^{-u} \frac{du}{2} = \frac{1}{(2)^7} \int_0^{\infty} u^6 e^{-u} du = \frac{6!}{2^7} = \frac{45}{8}.$$

$$(iii) \int_0^{\infty} y e^{-y^3} dy,$$

بوضع $y^3 = u$, $3y^2 dy = du$ ونلاحظ أن حدود التكامل تبقى كما هي

$$\int_0^{\infty} y e^{-y^3} dy = \int_0^{\infty} u^{\frac{1}{3}} e^{-u} \cdot \frac{1}{3} u^{-\frac{2}{3}} du = \frac{1}{3} \int_0^{\infty} u^{-\frac{1}{3}} e^{-u} du = \frac{1}{3} \int_0^{\infty} u^{\frac{1}{3}-1} e^{-u} du = \frac{\pi}{3}$$