Ministry of Higher Education and Scientific Research

Al-Mustaqbal University College Department of Chemical Engineering and petroleum Industrials

Mathematics II

2nd Stage

Lecturer: Rusul Ahmed Hashim

2023-2024

3.*Beta* function:

تعرف دالة بيتا كالآتي:

$$\beta(n,m)=\int_0^1 t^{n-1}(1-t)^{m-1}\,dt \qquad (n>0,\ m>0) \qquad (10)$$

وواضح عند $t \to 0$ لابد من وجود قيود على t بينما عند $t=1$ لا توجد أي قيود عليها وعليه يتضح من المعادلتين (1), (10) أن القيود المفروضة عند نقطة الأصل على دالتي $\beta(n,m),\Gamma(n)$ قد تحكمت في تحديد ماهية n,m.

<u>العلاقة بين دالتي بيتا وجاما :</u>

<u>نظرية ٦:</u>

هذه النظرية تربط بين دالتي بيتا وجاما اعتمادا على إثبات نظرية (٥) كالآتي:

$$\beta(n,m)=\frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(n+m)} \qquad (11)$$

امثـــــــــــــــلة محلولة

احسب التكاملات الآتية:

(i) $\int_0^1 x^4(1-x)^3\,dx$

الحل:

نلاحظ أن هذه التكاملات يمكن حلها بدالة بيتا كالآتي:

$$\text{(i)}\quad \int_0^1 x^4(1-x)^3\,dx=\int_0^1 x^{5-1}(1-x)^{4-1}\,dx=\beta(5,4)=\frac{\Gamma(5)\Gamma(4)}{\Gamma(9)}=\frac{4!\,3!}{8!}=\frac{1}{280}.$$

(iii) $\int_0^a y^4(a^2-y^2)^{\frac{1}{2}}\,dy$

بوضع $y^2=a^2x$ وعليه $y=ax^{\frac{1}{2}}$

$$\int_0^a y^4(a^2-y^2)^{\frac{1}{2}}\,dy=\int_0^1 (ax^{\frac{1}{2}})^4\,a(1-x)^{\frac{1}{2}}\,a\,\frac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{a^6}{2}\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}\cdot(1-x)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$=\frac{a^6}{2}\,\beta\left(\tfrac{5}{2},\tfrac{3}{2}\right)=\frac{a^6}{2}\,\frac{\Gamma(\frac{5}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(4)}=\frac{a^6}{2}\cdot\frac{(\frac{3}{2})(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})\pi}{3!}=\frac{\pi a^6}{32}.$$

**ملاحظة مهمه: ممكن استخدام المعادلة التالية التي تحتوي على دالة ال(sin & cos)

$$\beta(n,m)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n-1}\theta \quad \sin^{2m-1}\theta \quad d\theta=\frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(n+m)} \qquad (n>0,\ m>0)$$

احسب التكاملات الآتية:

(i) $\int_{}^{\frac{\pi}{2}}\sin^6\theta \ \ d\theta$ (ii) $\int_{}^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\cos^5\theta \ d\theta$

الحل:

لحساب هذه العلاقات من المفيد استخدام الآتي:

$$\beta(n,m)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}\theta\cos^{2m-1}\theta d\theta$$

ولذلك

(i) $\int^{\frac{\pi}{2}}\sin^6\theta d\theta$

(ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\cos^5\theta d\theta$

بوضع $n=\frac{5}{2}$ $,2n-1=4$ $2m-1=5$ $m=3$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\cos^5\theta d\theta=2\beta\left(\tfrac{5}{2},3\right)=2\frac{\Gamma(\frac{5}{2})\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{11}{2})}=\frac{8}{315}$$