عنوان المحاضرة: مراجعة عامة في التفاضل والتكامل

1- المشتقات/التفاضلات:

a-مشتقة الثابت = صفر

1- $f(x) = 6 \Longrightarrow f'(x) = 0$

2- $f(x) = \sqrt{5} \Longrightarrow f'(x) = 0$

3- $f(x) = a \Longrightarrow f'(x) = 0$

b-مشتقة المتغير

$f(x) = x^2$ $\quad f'(x) = nx^{n-1}$ $\quad f(x) = x^n$

E-mail: hussein.kadhim@uomus.edu.iq

مثال:

1) $f(x) = x \Longrightarrow f'(x) = 1$

2) $f(x) = x^2 \Longrightarrow f'(x) = 2x$

3) $f(x) = x^3 \Longrightarrow f'(x) = 3x^2$

4) $f(x) = x^4 \Longrightarrow f'(x) = 4x^3$

5) $f(x) = x^5 \Longrightarrow f'(x) = 5x^4$

6) $f(x) = 2x \Longrightarrow f'(x) = 2$

7) $f(x) = 3x^2 \Longrightarrow f'(x) = 6x$

8) $f(x) = 5x^3 \Longrightarrow f'(x) = 15x^2$

9) $f(x) = x^{-2} \Longrightarrow f'(x) = -2x^{-3}$

10) $f(x) = x^{-3} \Longrightarrow f'(x) = -3x^{-4}$

11) $f(x) = x^{-4} \Longrightarrow f'(x) = -4x^{-5}$

12) $f(x) = 3x^{-5} \Longrightarrow f'(x) = -15x^{-6}$

c- مشتقة الجذور

1) $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$

2) $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$

3) $f(x) = \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}} \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{4} x^{-\frac{3}{4}}$

4) $f(x) = \sqrt[5]{x} = x^{\frac{1}{5}} \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{5} x^{-\frac{4}{5}}$

5) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}} \Longrightarrow f'(x) = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}$

6) $f(x) = \sqrt[5]{x^3} = x^{\frac{3}{5}} \Longrightarrow f'(x) = \frac{3}{5} x^{-\frac{2}{5}}$

E-mail: hussein.kadhim@uomus.edu.iq

d-مشتقة الدوال كثيرة الحدود

$$f(x) = h(x) \mp g(x) \Longrightarrow f^{/}(x) = h^{/}(x) \mp g^{/}(x)$$

مثال

1) $f(x) = 3x^5 + 7x \Longrightarrow f^{/}(x) = 15x^4 + 7$

2) $f(x) = 3x^4 - 4x^2 + 6 \Longrightarrow f^{/}(x) = 12x^3 - 8x$

3) $f(x) = 2x^2 + \frac{1}{2}x \Longrightarrow f^{/}(x) = 4x + \frac{1}{2}$

4) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{3}x^3 + 9 \Longrightarrow f^{/}(x) = x - 4x^2$

5) $f(x) = \frac{1}{5}x^{-2} - \frac{2}{7}x^{-3} + 9 \Longrightarrow f^{/}(x) = \frac{-2}{5}x^{-3} + \frac{6}{7}x^{-4}$

e- مشتقة حاصل ضرب دالتين

الاولى في مشتقة الثانية + الثانية في مشتقة الاولى

$$f(x) = g(x) . h(x) \Longrightarrow f'(x) = g(x) . h'(x) + h(x) . g'(x)$$

مثال / جد المشتقة للدالة $f(x) = (x^4 - x^2 + 1)(5x^6 - 3x)$

الحل /

$f(x) = (x^4 - x^2 + 1)(5x^6 - 3x)$

$f^{/}(x) = (x^4 - x^2 + 1)(30x^5 - 3) + (5x^6 - 3x)(4x^3 - 2x)$

E-mail: hussein.kadhim@uomus.edu.iq

مثال / جد المشتقة للدالة $f(x) = (4 - x)(x^2 + 3)$ عند $x = 2$

الحل /

$$f(x) = (4 - x)(x^2 + 3)$$
$$f'(x) = (4 - x)(2x) + (x^2 + 3)(-1)$$
$$f'(2) = (4 - 2)(2(2)) + (2^2 + 3)(-1) = 2(4) + (7)(-1) = 8 - 7 = 1$$

f- مشتقة حاصل قسمة دالتين

$$\frac{\text{المقام في مشتقة البسط} - \text{البسط في مشتقة المقام}}{\text{المقام}^2}$$

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \longrightarrow f'(x) = \frac{h(x)\,.g'(x) - g(x)\,.h'(x)}{(h(x))^2}$$

مثال / جد المشتقة للدالة $f(x) = \frac{x^3+1}{x^4+1}$ عند $x = 1$

الحل/

$$f'(x) = \frac{(x^4+1)(3x^2)-(x^3+1)(4x^3)}{(x^4+1)^2}$$

$$f'(1) = \frac{(1^4+1)(3\times1^2)-(1^3+1)(4\times1^3)}{(1^4+1)^2} = \frac{2\times3-2\times4}{2^2} = \frac{6-8}{4} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

E-mail: hussein.kadhim@uomus.edu.iq

g-مشتقة القوس مرفوعة لأوس

$$f(x) = [h(x)]^n \longrightarrow f'(x) = n[h(x)]^{n-1}(h'(x))$$

مثال / جد المشتقة للدالة $f(x) = (x^3 + x^2 + x + 1)^5$

الحل /

$$f'(x) = 5(x^3 + x^2 + x + 1)^4 (3x^2 + 2x + 1)$$

h-مشتقة الجذر التربيعي

$$f(x) = \sqrt{\quad} \longrightarrow f'(x) = \frac{\text{مشتقة داخل الجذر}}{2\sqrt{\quad}}$$

مثال / اذا كانت $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$ جد $f'(x)$

الحل /

$$f'(x) = \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+1}}$$

E-mail: hussein.kadhim@uomus.edu.iq

تطبيقات المشتقات الفيزياوية

١ـ الزمن ويرمز له بالرمز t

٢ـ الإزاحة (البعد او الموضع) ويرمز لها بالرمز $s(t)$

٣ـ السرعة ويرمز لها بالرمز $v(t)$

٤ـ التعجيل ويرمز له بالرمز $a(t)$

القوانين المستخدمة

١ـ السرعة = مشتقة الإزاحة ونعبر عن ذلك $v(t) = s'(t)$

٢ـ التعجيل = مشتقة السرعة ونعبر عن ذلك $a(t) = v'(t)$

E-mail: hussein.kadhim@uomus.edu.iq

خلاصة اولية عامة عن قوانين المستقات الاساسية:

Basic Differentiation Rules

1. $\frac{d}{dx}[cu] = cu'$
2. $\frac{d}{dx}[u \pm v] = u' \pm v'$
3. $\frac{d}{dx}[uv] = uv' + vu'$
4. $\frac{d}{dx}\left[\frac{u}{v}\right] = \frac{vu' - uv'}{v^2}$
5. $\frac{d}{dx}[c] = 0$
6. $\frac{d}{dx}[u^n] = nu^{n-1}u'$
7. $\frac{d}{dx}[x] = 1$
8. $\frac{d}{dx}[|u|] = \frac{u}{|u|}(u'), \quad u \neq 0$
9. $\frac{d}{dx}[\ln u] = \frac{u'}{u}$
10. $\frac{d}{dx}[e^u] = e^u u'$
11. $\frac{d}{dx}[\log_a u] = \frac{u'}{(\ln a)u}$
12. $\frac{d}{dx}[a^u] = (\ln a)a^u u'$
13. $\frac{d}{dx}[\sin u] = (\cos u)u'$
14. $\frac{d}{dx}[\cos u] = -(\sin u)u'$
15. $\frac{d}{dx}[\tan u] = (\sec^2 u)u'$
16. $\frac{d}{dx}[\cot u] = -(\csc^2 u)u'$
17. $\frac{d}{dx}[\sec u] = (\sec u \tan u)u'$
18. $\frac{d}{dx}[\csc u] = -(\csc u \cot u)u'$
19. $\frac{d}{dx}[\arcsin u] = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
20. $\frac{d}{dx}[\arccos u] = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$
21. $\frac{d}{dx}[\arctan u] = \frac{u'}{1+u^2}$
22. $\frac{d}{dx}[\operatorname{arccot} u] = \frac{-u'}{1+u^2}$
23. $\frac{d}{dx}[\operatorname{arcsec} u] = \frac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$
24. $\frac{d}{dx}[\operatorname{arccsc} u] = \frac{-u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$
25. $\frac{d}{dx}[\sinh u] = (\cosh u)u'$
26. $\frac{d}{dx}[\cosh u] = (\sinh u)u'$
27. $\frac{d}{dx}[\tanh u] = (\operatorname{sech}^2 u)u'$
28. $\frac{d}{dx}[\coth u] = -(\operatorname{csch}^2 u)u'$
29. $\frac{d}{dx}[\operatorname{sech} u] = -(\operatorname{sech} u \tanh u)u'$
30. $\frac{d}{dx}[\operatorname{csch} u] = -(\operatorname{csch} u \coth u)u'$
31. $\frac{d}{dx}[\sinh^{-1} u] = \frac{u'}{\sqrt{u^2+1}}$
32. $\frac{d}{dx}[\cosh^{-1} u] = \frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$
33. $\frac{d}{dx}[\tanh^{-1} u] = \frac{u'}{1-u^2}$
34. $\frac{d}{dx}[\coth^{-1} u] = \frac{u'}{1-u^2}$
35. $\frac{d}{dx}[\operatorname{sech}^{-1} u] = \frac{-u'}{u\sqrt{1-u^2}}$
36. $\frac{d}{dx}[\operatorname{csch}^{-1} u] = \frac{-u'}{|u|\sqrt{1+u^2}}$

E-mail: hussein.kadhim@uomus.edu.iq

مشتقة الدوال العكسية

1) $\frac{d}{dx} sin^{-1}x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ 2) $\frac{d}{dx} cos^{-1}x = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

3) $\frac{d}{dx} tan^{-1}x = \frac{dx}{1+x^2}$ 4) $\frac{d}{dx} cot^{-1}x = -\frac{dx}{1+x^2}$

5) $\frac{d}{dx} sec^{-1}x = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ 6) $\frac{d}{dx} csc^{-1}x = -\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

E-mail: hussein.kadhim@uomus.edu.iq

مشتقات الدوال الزائدية

$$1)\ \frac{d}{dx}(\sinh y) = \cosh y\ \frac{dy}{dx}$$

مثال / جد $\frac{d}{dx}\sinh 5x$

الحل /
$$\frac{d}{dx}\sinh 5x = \cosh 5x \cdot 5 = 5\cosh 5x$$

$$2)\ \frac{d}{dx}(\cosh y) = \sinh y\ \frac{dy}{dx}$$

مثال / جد $\frac{d}{dx}\cosh \frac{x}{2}$

الحل /
$$\frac{d}{dx}\cosh\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\sinh\frac{x}{2}$$

$$3)\ \frac{d}{dx}(\tanh y) = \operatorname{sech}^2 y\ \frac{dy}{dx}$$

مثال / جد $\frac{d}{dx}\tanh x^2$

$$\frac{d}{dx}\tanh x^2 = \operatorname{sech}^2 x^2(2x) = 2x\operatorname{sech}^2 x^2$$

$$4)\ \frac{d}{dx}(\coth y) = -\operatorname{csch}^2 y\ \frac{dy}{dx}$$

مثال / جد $\frac{d}{dx}\coth 8x$

$$\frac{d}{dx}\coth 8x = -8\operatorname{csch}^2 8x$$

$$5)\ \frac{d}{dx}(\operatorname{sech} y) = \operatorname{sech} y \tanh y\ \frac{dy}{dx}$$

مثال / جد $\frac{d}{dx}\operatorname{sech} 4x$

الحل
$$\frac{d}{dx}\operatorname{sech} 4x = 4\operatorname{sech} 4x \tanh 4x$$

$$6)\ \frac{d}{dx}(\operatorname{csch} y) = -\operatorname{csch} y \coth y\ \frac{dy}{dx}$$

مثال / جد $\frac{d}{dx}\operatorname{csch} 5x$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{csch} 5x = -5\operatorname{csch} 5x \coth 5x$$

2- التكامل:

التكامل : هو عملية معاكسة لعملية الاشتقاق ويرمز له بالرمز $\int$

الرمز dx - - - $\int$ يعني التكامل بالنسبة لـ x
لرمز dy - - - $\int$ يعني التكامل بالنسبة لـ y

وهو على نوعين:

1- تكامل غير محدد ----- لا يوجد حدود للتكامل، ويوجد ثابت للتكامل.
2- تكامل محدد ----- ويكون هنالك حدود للتكامل (من ...... إلى) ولا يوجد ثابت للتكامل.

E-mail: hussein.kadhim@uomus.edu.iq

1- أنواع علاقات التكامل الغير المحدد:

a. تكامل دالة الثابت:

$$\int a\,dx = ax + c$$

a ….. Constant

c ….. Integral constant

أمثلة:

$$1)\ \int 6\,dx = 6x + c$$

$$2)\ \int -\,dx = -x + c$$

$$3)\ \int \sqrt{5}\,dx = \sqrt{5}\,x + c$$

b. تكامل المتغير مرفوع لاس:

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

E-mail: hussein.kadhim@uomus.edu.iq

c. تكامل الجذور

وهي مشابهة لتكامل المتغير المرفوع لاس

مثال:

$$\int \sqrt{x}\ dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3}\ x^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$$

d. تكامل الدوال كثيرة الحدود

مثال

$$\int (3x^2\ +\ 5)dx = \frac{3x^3}{3} + 5x + c = x^3 + 5x + c$$

مثال / جد التكامل $\int (2x + 5)(x+ 1)\, dx$

الحل /

$$\int (2x\ +\ 5)(x +\ 1)\ dx\ =\ \int 2x^2\ +\ 2x\ +\ 5x\ +\ 5\ )dx$$

$$= \int 2x^2\ +\ 7x\ +\ 5\ )dx$$

$$= \frac{2x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} + 5x + c$$

E-mail: hussein.kadhim@uomus.edu.iq

مثال/ جد التكامل $\int \frac{(2x^2-3)^2-9}{x^2}dx$

الحل /

$$\int \frac{(2x^2-3)^2-9}{x^2}dx = \int \frac{4x^4-12x^2+9-9}{x^2}dx$$
$$= \int \frac{4x^4-12x^2}{x^2}dx$$
$$= \int (4x^2-12)dx$$
$$= \frac{4}{3}x^3 - 12x + c$$

مثال/ جد التكامل $\int \frac{x^4-8x}{x-2}dx$

الحل /

$$\int \frac{x^4-8x}{x-2}dx = \int \frac{x(x^3-8)}{x-2}dx$$
$$= \int \frac{x(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}dx$$
$$= \int x(x^2+2x+4)dx$$
$$= \int (x^3+2x^2+4x)dx$$
$$= \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + 2x^2 + c$$

E-mail: hussein.kadhim@uomus.edu.iq

e. تكامل الدوال المثلثية

1) $\int \sin ax\, dx = \frac{-1}{a} \cos ax + c$

2) $\int \cos ax\, dx = \frac{1}{a} \sin ax + c$

3) $\int \sec^2 ax\, dx = \frac{1}{a} \tan ax + c$

4) $\int \csc^2 ax\, dx = \frac{-1}{a} \cot ax + c$

5) $\int \sec ax \tan ax\, dx = \frac{1}{a} \sec ax + c$

6) $\int \csc ax \cot ax\, dx = \frac{-1}{a} \csc ax + c$

$\int Sin^n x dx$ أو $\int cos^n x dx$ حيث n عدد زوجي لإيجاد التكامل نستخدم العلاقة

$\int sin^n x = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^{\frac{n}{2}} dx$ or $\int cos^n x = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^{\frac{n}{2}} dx$

E-mail: hussein.kadhim@uomus.edu.iq

$\int Sin^n x dx$ أو $\int cos^n x dx$ حيث n عدد فردي لإيجاد التكامل نستخدم العلاقات التالية

$$\int Sin^n xdx = \int sin^{n-1}x \sin x = \int (1-cos^2x)^{\frac{n}{2}} sinx$$

$$\int cos^n xdx = \int cos^{n-1}x \cos x = \int (1-sin^2x)^{\frac{n}{2}} cosx$$

$\int cot^n xdx$ أو $\int tan^n xdx$ حيث $n \geq 2$ لإيجاد التكامل نستخدم العلاقات التالية

$$\int tan^n x\, dx = \int tan^{n-1}x\, tan^2 x\, dx = \int tan^2 x(\, sec^2 x - 1)$$

$$\int cot^n x\, dx = \int cot^{n-1}x\, cot^2 x\ \ dx = \int cot^2 x(\, csc^2 x - 1)$$

$$\int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln|\sin x| + c$$

$$\int cot^n x\, dx = -\frac{1}{n-1} cot^{n-1} x - \int cot^{n-2}\, x\, dx$$

E-mail: hussein.kadhim@uomus.edu.iq

أمثلة:

$$\int \cot^2 x dx = \int (\csc^2 x - 1)dx = -\cot x - x + c$$

$$\int \cot^3 x\, dx = \int \cot x \cot^2 x dx = \int \cot x(\csc^2 x - 1)dx$$

$$= \int \cot x \csc^2 x - \cot x = -\frac{1}{2}\cot^2 x - \ln|\sin x| + c$$

$$\int \cot^4 x\, dx = \int \cot^2 x \cot^2 x dx$$

$$= \int \cot^2 x(\csc^2 x - 1)dx$$

$$= \int \cot^2 x \csc^2 x - \cot^2 x$$

$$= -\frac{1}{3}\cot^3 x + \cot x + x + c$$

E-mail: hussein.kadhim@uomus.edu.iq

$$\int cot^5 x\, dx = \int cot^3 x\, cot^2 x dx$$

$$= \int cot^3 x(csc^2 x - 1)dx$$

$$= \int cot^3 x\, csc^2 x - cot^3 x$$

$$= \int cot^3 x\, csc^2 x - cot\, x\, cot^2 x dx$$

$$= \int cot^3 x\, csc^2 x - cotx(csc^2 x - 1)dx$$

$$= \int cot^3 x\, csc^2 x - cotx\, csc^2 x - cot\, x\, dx$$

$$= -\frac{1}{4} cot^4 x + \frac{1}{2} cot^2 x - ln|sin\, x| + c$$

E-mail: hussein.kadhim@uomus.edu.iq

$\int sec^n x dx$ أو $\int csc^n x dx$ حيث n عدد زوجي لإيجاد التكامل نستخدم العلاقات التالية

$$\int sec^n x\, dx = \int sec^2 x\, sec^{n-2} x dx = \int sec^2 x\,(tan^2 x + 1)^{n-2} dx$$

$$\int csc^n x\, dx = \int csc^2 x\, csc^{n-2} x dx = \int csc^2 x\,(cot^2 x + 1)^{n-2} dx$$

$\int sec^n x dx$ أو $\int csc^n x dx$ حيث n عدد فردي لإيجاد التكامل نستخدم العلاقات التالية

$$\int sec^n x\, dx = \frac{1}{n-1} tanx\, sec^{n-2} x + \frac{n-2}{n-1}\int sec^{n-2} x\, dx$$

$$\int csc^n x\, dx = -\frac{1}{n-1} cotx\, csc^{n-2} x + \frac{n-2}{n-1}\int csc^{n-2} x\, dx$$

$\int sin^n x\, cos^m x\, dx$ حيث n ,m أعداد فردية لإيجاد التكامل نستخدم العلاقات التالية

$$\int sin^{n-1} x\, cos^m x\, sin\, x\, dx = \int (1 - cosx)^{n-1} x\, cos^m x\, sinx\, dx$$

$$\int sin^n x\, cos^{m-1} x\, cosx\, dx = \int sin^n x\,(1 - sinx)^{m-1} x\, cosx\, dx$$

$$\int sin^n x\, cos^m x\, dx$$

١- اذا كان m عدد فردي n عدد زوجي لإيجاد التكامل نستخدم العلاقة التالية

$$\int sin^n x\, cos^{m-1} x\, cosx\, dx = \int sin^n x\,(1 - sinx)^{m-1} x\, cosx\, dx$$

١- اذا كان m عدد زوجيي n عدد فردي لإيجاد التكامل نستخدم العلاقة التالية

$$\int sin^{n-1} x\, sin\, xcos^m x dx = \int sinx\,(1 - cosx)^{m-1} x\, cos^m x\, dx$$

E-mail: hussein.kadhim@uomus.edu.iq

$\int sin^n x\, cos^m x\, dx$ حيث n ,m أعداد زوجية

١- اذا كانت $n = m$ فان

$$\int sin^n x\, cos^m x \quad dx = \frac{1}{2^n}\int sin^n 2x\, dx$$

$\int sin^n x\, cos^m x\, dx$ حيث n ,m أعداد زوجية

١- اذا كانت $n < m$ فان

$$\int sin^n x\, cos^m x \quad dx = \int sin^n x\, cos^n x\, cos^{m-n}$$

$$= \frac{1}{2^n}\int sin^n 2x \;\; cos^{m-n} dx$$

$\int sin^n x\, cos^m x\, dx$ حيث n ,m أعداد زوجية

١- اذا كانت $n > m$ فان

$$\int sin^n x\, cos^m x \quad dx = \int sin^{n-m} x\, sin^m x\, cos^m x$$

$$= \frac{1}{2^n}\int sin^n 2x \;\; cos^{m-n} dx$$

$\int tan^n x\, sec^m x\, dx$

١- اذا كان m عدد زوجي لإيجاد التكامل نستخدم العلاقة التالية

$$\int tan^n x\, sec^{m-2} x\, sec^2 x\, dx \;= \int tan^n x\,(1 + tan x)^{m-2} x\, sec^2 x\, dx$$

E-mail: hussein.kadhim@uomus.edu.iq

$$\int tan^n x\, sec^m x\, dx$$

١- اذا كان m,n أعداد فردية لإيجاد التكامل نستخدم العلاقة التالية

$$\int sec^{m-1}x\, tan^{n-1}x\, secx\, tan\, x\, dx$$
$$= \int sec^{m-1}(sec^2x - 1)^{n-1}\, x\, sec\, x\, tanx\, dx$$

خلاصة اولية لعلاقات التكامل الاساسية

Basic Integration Formulas

1. $\int kf(u)\,du = k\int f(u)\,du$
2. $\int [f(u) \pm g(u)]\,du = \int f(u)\,du \pm \int g(u)\,du$
3. $\int du = u + C$
4. $\int a^u\,du = \left(\frac{1}{\ln a}\right)a^u + C$
5. $\int e^u\,du = e^u + C$
6. $\int \sin u\,du = -\cos u + C$
7. $\int \cos u\,du = \sin u + C$
8. $\int \tan u\,du = -\ln|\cos u| + C$
9. $\int \cot u\,du = \ln|\sin u| + C$
10. $\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + C$

تكاملات الدوال التي تؤدي للدوال العكسية

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1}x + c$

2) $\int \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = \cos^{-1}x + c$

3) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1}x + c$

4) $\int \frac{-dx}{1+x^2} = \cot^{-1}x + c$

5) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \sec^{-1}x + c$

6) $\int \frac{-dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \csc^{-1}x + c$

E-mail: hussein.kadhim@uomus.edu.iq

تكاملات الدوال الزائدية

$$1)\ \int \sinh ax\, dx = \frac{1}{a} \cosh ax + c$$

$$2)\ \int \cosh ax\, dx = \frac{1}{a} \sinh ax + c$$

$$3)\ \int \mathrm{sech}^2\, ax\, dx = \frac{1}{a} \tanh ax + c$$

$$4)\ \int \mathrm{csch}^2\, ax\, dx = \frac{-1}{a} \coth ax + c$$

$$5)\ \int \mathrm{sech}\, ax \tanh ax\ dx = -\frac{1}{a} \mathrm{sech}\, ax + c$$

$$6)\ \int \mathrm{csch}\, ax \coth ax\ dx = \frac{-1}{a} \mathrm{csch}\, ax + c$$

2- ألتكامل المحدد:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

حيث a الحد الادنى للتكامل و b الحد الاعلى للتكامل

خواص التكامل

أولاً / a/ اذا كانت f دالة مستمرة على الفترة فاذا كانت $\forall x \in [a, b]$ و $f(x) \geq 0$ فان

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

b/ اذا كانت f دالة مستمرة على الفترة فاذا كانت $\forall x \in [a, b]$ و $f(x) \leq 0$ فان

$$\int_a^b f(x)dx \leq 0$$

ثانيا / اذا كانت f دالة مستمرة على الفترة $[a, b]$ و c عددا حقيقيا ثابتا فان

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

مثال ٥/ اذا كان $\int_2^5 f(x) = 8$ فاوجد $\int_2^5 5f(x)dx$

الحل /

$$\int_2^5 5f(x)dx = 5\int_2^5 f(x)dx = 5(8) = 40$$

E-mail: hussein.kadhim@uomus.edu.iq

ثالثا / اذا كانت f , g دالتان مستمرتين على الفترة $[a,b]$ و فان

$$\int_a^b [f(x) \mp g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)dx \mp \int_a^b g(x)dx$$

مثال٦/ اذا كانت $\int_1^3 f(x)dx = 17$, $\int_1^3 f(x)dx = 15$

جد $1)\ \int_1^3 [f(x) + g(x)]\, dx$ ، $2)\ \int_1^3 [f(x) - g(x)]\, dx$

الحل/

$$1)\ \int_1^3 [f(x) + g(x)]\, dx = \int_1^3 f(x)dx + \int_1^3 g(x)dx = 17 + 15 = 32$$

$$2)\ \int_1^3 [f(x) - g(x)]\, dx = \int_1^3 f(x)dx - \int_1^3 g(x)dx = 17 - 15 = 2$$

رابعا / اذا كانت دالة مستمرة على الفترة $[a,b]$ وكانت $c \in (a,b)$ فان

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

مثال / اذا كانت $\int_3^7 f(x)dx = 8$, $\int_1^3 f(x)dx = 5$ فاوجد $\int_1^7 f(x)dx$

الحل /

$$\int_1^7 f(x)dx = \int_1^3 f(x)dx + \int_3^7 f(x)dx = 5 + 8 = 13$$

----- نهاية محاضرة "**مراجعة عامة في التفاضل والتكامل**" -----

E-mail: hussein.kadhim@uomus.edu.iq