<u>نوع الثاني:</u>

اذا لم يظهر المتغير الثاني (المستقل) x في المعادلة 1) ، نفرض $y' = p$ ثم نجري التحليل الاتي

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}p$$

فتصبح المعادلة 1) بالصيغة

$$E(y, p, p\frac{dp}{dy}) = 0$$

وهي معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى بمتغير مستقل y , ومتغير معتمد p ونحلها من اجل y, p ثم نعوض عن

$\frac{dy}{dx} = p$ ثم نحلها من اجل x, y كما في المثال الاتي:

مثال/ حل المعادلة التفاضلية الاتية: $yy'' + 2y' - 2(y')^2 = 0$

الحل/ نفرض $p = y'$ فينتج $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$

وبالتعويض في المعادلة التفاضلية نحصل على

$$yp\frac{dp}{dy} + 2p - 2p^2 = 0$$
$$p\left[y\frac{dp}{dy} - 2(p-1)\right] = 0$$

أما $p = 0$ ومنها $\frac{dy}{dx} = 0$ أي $y = b$ حيث b ثابت اختياري وبهذا يكون $y = b$ حلا منفردا

أو

$$y\frac{dp}{dy} - 2(p-1) = 0 \rightarrow y\frac{dp}{dy} = 2(p-1) \rightarrow\rightarrow \frac{dp}{p-1} = 2\frac{dy}{y}$$
$$\ln(p-1) = \ln y^2 + c \rightarrow\rightarrow \ln(p-1) = \ln y^2 + \ln c_1$$
$$\ln(p-1) = \ln(c_1 y^2) \rightarrow\rightarrow p - 1 = c_1 y^2$$
$$p = c_1 y^2 + 1$$

ثم نعوض عن $p = \frac{dy}{dx}$ ونحل المعادلة التفاضلية الجديدة

$$\frac{dy}{dx}=c_1y^2+1\rightarrow\rightarrow\frac{dy}{c_1y^2+1}=dx$$

أذا كان $c_1>0$ فأن حلها

$$\frac{1}{\sqrt{c_1}}\tan^{-1}\sqrt{c_1}\,y=x+c_2$$

$$\tan^{-1}\sqrt{c_1}\,y=x\sqrt{c_1}+c_2\sqrt{c_1}$$

$$\sqrt{c_1}\,y=\tan(x\sqrt{c_1}+c_2\sqrt{c_1}$$

اما اذا كانت $c_1<0$ فأن حل المعادلة

$$\frac{dy}{1-cy^2}=dx\rightarrow\rightarrow\frac{1}{\sqrt{c}}\tanh^{-1}\sqrt{c}\,y=x+c$$