Exact Differential Equations

المعادلة التالية

$$\boxed{P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0}$$

نستطيع اعتبارها (Exact) اذا كانت توفر دالة لمتغيرين $u(x,y)$ مع مشتقة جزئية مستمرة كما يلي

$$du(x,y) = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

الحل العام لمثل هذه المعادلات هو كما يلي

$$\boxed{u(x,y) = C}$$

خطوات الحل

① يجب التأكد انها (Exact) بواسطة الفحص لتحقق الشرط امامه:

$$\boxed{\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}}$$

② نكتب المعادلات كما يلي

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = P(x,y) & \text{—①} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y) & \text{—②} \end{cases}$$

③ نكامل المعادلة الأولى على المتغير (x) ونستبدل الثابت (C) بواسطة دالة غير معروفة لـ(y) كما يلي

$$u(x,y) = \int P(x,y)\,dx + \varphi(y)$$

④ نشتق بالنسبة الى (y) ونعوض الدالة $u(x,y)$ في المعادلة ②

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial\left[\int P(x,y)\,dx + \varphi(y)\right]}{\partial y} = Q(x,y)$$

2

من الخطوة الرابعة نحصل على مشتقة للدالة الغير معروفة كما يلي

$$\boxed{\varphi'(y) = Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,y)\,dx\right)}$$

(5) نكامل العبارة الأخيرة لإيجاد الدالة الغير معروفة ، بالتالي الدالة $u(x,y)$

$$\boxed{u(x,y) = \int P(x,y)\,dx + \varphi(y)}$$

(6) الحل العام سيكون كما يلي :-

$$\boxed{u(x,y) = C}$$

ملاحظة/ نستطيع في الخطوة الثالثة ان نكامل المعادلة الثانية بالنسبة الى (y) وليس (x). وبعد التكامل نحصل على دالة غير معروفة $\varphi(x)$.

EX1/ Solve the D.E.

$$2xy\,dx + (x^2+3y^2)\,dy = 0$$

Sol/

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial (x^2+3y^2)}{\partial x} = \boxed{2x}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial (2xy)}{\partial y} = \boxed{2x}$$

$\therefore$ Exact

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy \quad \text{--- (1)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2+3y^2 \quad \text{--- (2)}$$

نكامل المعادلة ① نسبة الى (X)

$$u(x,y) = \int 2xy\,dx = \boxed{x^2y + \varphi(y)}$$

نعوض في المعادلة ②

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial (x^2y+\varphi(y))}{\partial y} = x^2+3y^2$$

$$= \cancel{x^2} + \varphi'(y) = \cancel{x^2} + 3y^2$$

$$\therefore \boxed{\varphi'(y) = 3y^2}$$

نكامل اخر معادلة

$$\varphi(y) = \int 3y^2\,dy = \boxed{y^3}$$

$$\therefore \boxed{x^2y + y^3 = C}$$ General Solution

EX2/ Find the solution of the D.E.

$$(6x^2 - y + 3)\,dx + (3y^2 - x - 2)\,dy = 0$$

Sol/

نفحص

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial(3y^2 - x - 2)}{\partial x} = \boxed{-1}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial(6x^2 - y + 3)}{\partial y} = \boxed{-1}$$

Exact

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y) = \boxed{6x^2 - y + 3} \quad \text{①}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y) = \boxed{3y^2 - x - 2} \quad \text{②}$$

تكامل معادلة ① بالنسبة الى (x)

$$u(x,y) = \int (6x^2 - y + 3)\,dx = \frac{6x^3}{3} - xy + 3x + \varphi(y)$$

$$= 2x^3 - xy + 3x + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial[2x^3 - xy + 3x + \varphi(y)]}{\partial y} =$$ نساويها بالمعادلة ②

$$= \cancel{-x} + \varphi'(y) = 3x^2 \cancel{-x} - 2$$

$$\boxed{\varphi'(y) = 3y^2 - 2}$$

نكاملها

$$\varphi(y) = \int (3y^2 - 2)\,dy = \boxed{y^3 - 2y}$$

$$\therefore u(x,y) = 2x^3 - xy + 3x + y^3 - 2y$$

$$\therefore \boxed{2x^3 - xy + 3x + y^3 - 2y = C}$$ General Solution