

# البرمجة الخطية

## Linear Programming

البرمجة الخطية تعد أسلوباً من الأساليب الكمية، فهي أسلوب تحليلي كمي يتم استخدامه لمساعدة متخذ القرار في تحقيق هدف محدد تعظيم أو تقليل أحد المتغيرات التابعة بإدخال جملة من المتغيرات المستقلة التي تشكل مجموعة من القيود. وتهدف البرمجة الخطية إلى تحليل البدائل المختلفة، لاختيار أفضلها من وجهة نظر المشروع، وذلك على ضوء الهدف المرغوب في تحقيقه مع الأخذ في الاعتبار القيود المفروضة على المشروع.

### عناصر البرمجة الخطية

1- دالة الهدف : الهدف في جميع مشاكل البرمجة الخطية

• يكون اما تحقيق "اقصى" أو "اقل" كمية ما.

2- القيود: تتمثل القيود في موارد محدودة يتنافس على استغلالها :

واستخدامها في مجالات مختلفة، ويعبر عنها في مشكلة البرمجة الخطية من خلال الكميات المتاحة منها، بمعنى أنه يتم تعظيم أو تدنية المتغيرات الداخلة ضمن دالة الهدف في ظل قيود تتمثل في موارد محدودة، ويعبر عن القيود في شكل معادلات خطية، وهي كما يلي:

•متساوية=

•متباينة أكبر من  $\leq$

• متباينة أقل من  $\geq$

### 3- شرط عدم السلبية

أي أن جميع المتغيرات الواقعة في دالة الهدف يجب ان تكون اكبر من او تساوي

$$\text{الصفري } X_j \geq 0$$

### حل البرمجة الخطية بيانيا

تعد الطريقة البيانية من ابسط طرق البرمجة الخطية التي تهدف الى ايجاد الحلول المناسبة للمسائل الادارية المختلفة (مسائل الانتاج ، مسائل التسويق ، مسائل الافراد ) ... ، وبخاصة تلك المتعلقة بالتخاذ القرارات ذات الموضوعات الفنية والمعايير الكمية ويعيب هذه الطريقة انه لايمكن استخدامها لحل مشاكل تتضمن اكثر من مجهولين ، وتقوم طريقة الحل بيانيا على تحديد منطقة نقاط الحلول الممكنة بيانيا ، ثم اختيار النقطة التي تحقق احسن قيمة لدالة الهدف.

### خطوات الحل البياني

1- يتم تحديد دالة الهدف على شكل معادلة رياضية تمثل المتغيرين للمشكلة المراد حلها.

2- يتم تحديد قيود المسألة على شكل متباينات.

3- يرسم محورين متعامدين ، المحور الافقي يمثل المتغير (x) والمحور العمودي يمثل المتغير (y)

4- نرسم المستقيمات التي تحددها المتباينات ونحدد المنطقة المقبولة والمنطقة المرفوضة (تحديد منطقة الحل)

## 5-تحديد الحل الامثل للبرنامج الخطي.

- تعني علامة  $<$  ان منطقة الحل على يمين او اعلى الخط المستقيم .
- تعني علامة  $>$  ان منطقة الحل على يسار او اسفل الخط المستقيم .
- اذا كانت جميع علامات المتباينات او اشارات المتباينات اقل من او يساوي  $\geq$  تكون منطقة الحل محصورة بين تقاطع المستقيمتين ونقطة الاصل  $(0,0)$ .
- اذا كانت اشارات المتباينات تحتوي على اكبر من او اقل من فان منطقة الحل تكون ابعد من منطقة الاصل  $(0, 0)$

**مثال 1** / تقوم شركة أثاث بتصنيع عدة منتجات من الأخشاب، يتمثل أهمها في الكراسي والطاولات، حيث يبلغ ثمن الكرسي الواحد في السوق \$ 10 ، ويحتاج إلى ساعة عمل واحدة في قسم النشر، وساعة عمل واحدة في قسم التجميع، بينما يبلغ ثمن الطاولة \$ 40 ، وتحتاج إلى ساعتين عمل في قسم النشر، وخمسة ساعات عمل في قسم التجميع ، وفي اللحظة التي يستوعب فيها السوق جميع المنتجات من كلا المنتجين، لا يستطيع مدير الشركة الحصول شهريا على أكثر من مائة ساعة عمل في قسم النشر، كما لا يستطيع الحصول على أكثر من مائة وخمسين ساعة عمل في قسم التجميع. وفي هذه الحالة يحتاج مدير الشركة إلى أن يحدد مزيج الإنتاج من الكراسي والطاولات الذي يحقق لمؤسسته أعلى عائد.

# Example 1

تقوم شركة أثاث بتصنيع عدة منتجات من الأخشاب، يتمثل أهمها في الكراسي والطاولات، حيث يبلغ ثمن الكرسي الواحد في السوق \$10، ويحتاج إلى ساعة عمل واحدة في قسم النشر، وساعة عمل واحدة في قسم التجميع، بينما يبلغ ثمن الطاولة \$40، وتحتاج إلى ساعتين عمل في قسم النشر، وخمسة ساعات عمل في قسم التجميع، وفي اللحظة التي يستوعب فيها السوق جميع المنتجات من كلا المنتجين، لا يستطيع مدير الشركة الحصول شهريا على أكثر من مائة ساعة عمل في قسم النشر، كما لا يستطيع الحصول على أكثر من مائة وخمسين ساعة عمل في قسم التجميع.

وفي هذه الحالة يحتاج مدير الشركة إلى أن يحدد مزيج الإنتاج من الكراسي والطاولات الذي يحقق لمؤسسته

**أعلى عائد**

# الحل باستخدام الطريقة البيانية

نتبع الخطوات التالية في صياغة المشكلة

الهدف هنا هو تعظيم العائد.	الهدف	أولا
كراسي ، طاولات.	المتغيرات	ثانيا
نعبر عن الكراسي ( $X_1$ )، ونعبر عن الطاولات ب ( $X_2$ ).	الرموز	ثالثا
حتى يسهل تكوين المعادلات الرياضية توضع البيانات الموضحة في المشكلة في صورة مصفوفة كما يلي:	الجدول	رابعا

# الحل باستخدام الطريقة البيانية

## جدول يبين بيانات المشكلة

الموارد المتاحة/ شهريا أقل من أو مساوية	$X_2$ طاولات	$X_1$ كراسي	
100 ساعة عمل	2	1	قسم النشر
150 ساعة عمل	5	1	قسم التجميع
	\$40	\$10	سعر البيع

# الحل باستخدام الطريقة البيانية

وضع البيانات في الجدول أعلاه في صورة معادلات كما يلي

<b>Objective function</b>	<b>Max <math>z = \\$10X_1 + \\$40X_2</math></b>	<b>دالة الهدف</b>
<b>constraints</b>	<b><math>1X_1 + 2X_2 \leq 100</math> <math>1X_1 + 5X_2 \leq 150</math></b>	<b>القيود</b>
<b>Non negative</b>	<b><math>X_1 \geq 0, X_2 \geq 0</math></b>	<b>عدم السلبية</b>

- 1- تكوين الاحداث السيني والاحداث الصادي  $(x_1-x_2)$
- 2- رسم مستقيمات القيود كما يلي :
- أ- تحويل القيود الى متساويات وذلك كما يلي:
- المستقيم الأول  $x_1+2x_2=100$
- المستقيم الثاني  $x_1+5x_2=150$

ب- تحديد نقطتين لكل مستقيم حتى يمكن رسمه وذلك بمعرفة قيم الاحداثين كما يلي

المستقيم الأول	
$x_2$	$x_1$
50	0
0	100

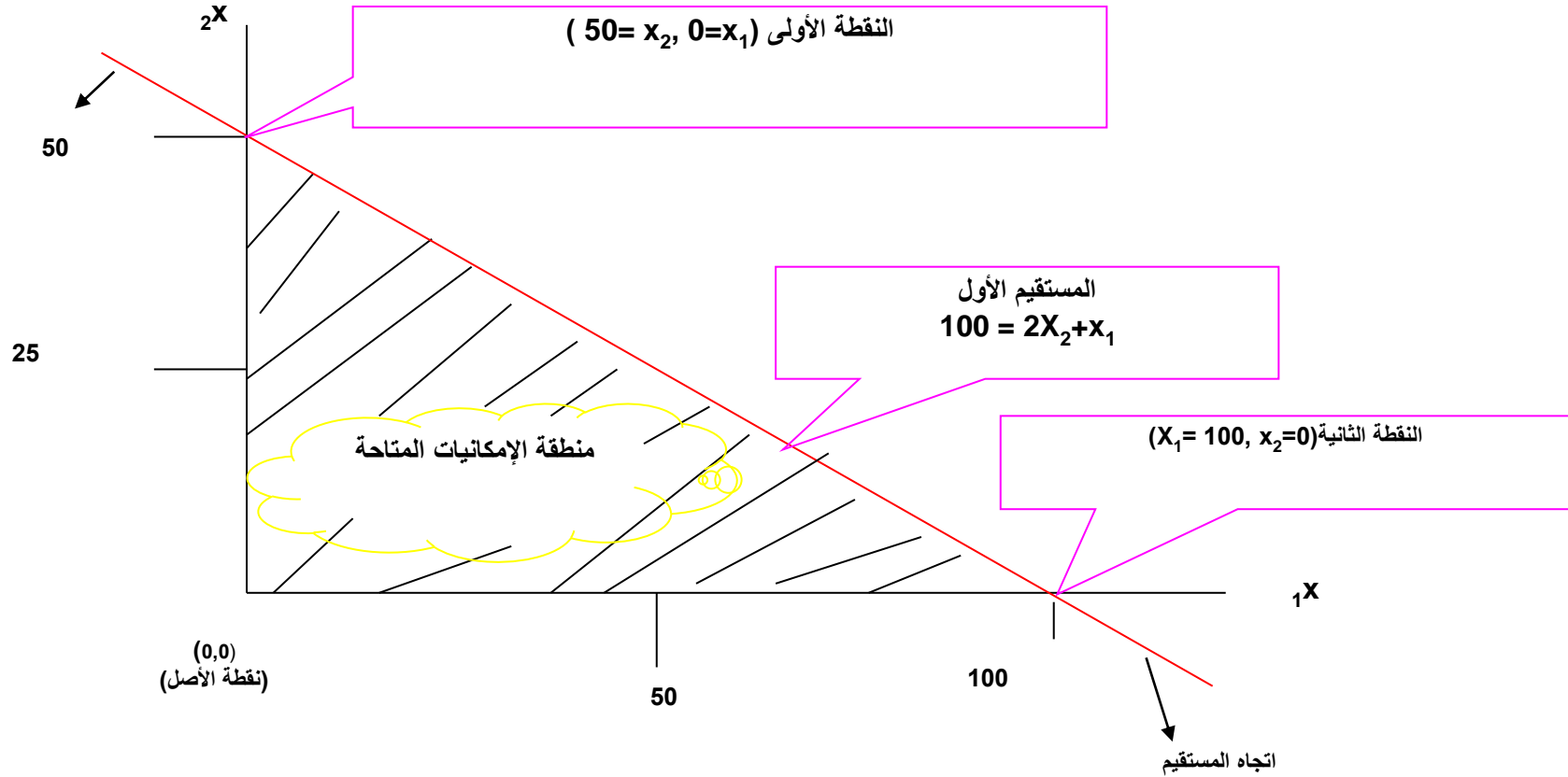


وتوضيحا لما تعنيه هذه الأرقام ، افترض ما يلي:

لو فرضنا أن المنتج ركز على إنتاج الطاولات ( $X_2$ ) ، وأهمل الكراسي ( $X_1$ ) ، فإنه يستطيع إنتاج 50 طاولة من ساعات الآلة المتوفرة لديه (بفرض أن القيد الأول يعبر عن ساعات العمل لآلة).

بينما إذا ركز الإنتاج على الكراسي ( $X_1$ ) مهملًا الطاولات ( $X_2$ ) فإنه يستطيع إنتاج 100 كرسي من ساعات الآلة المتوفرة.

# يمكن الآن رسم الإحداثي السيني و الصادي وتحديد المستقيم الأول عليه كما يلي



تحديد اتجاه المستقيم الذي يحققه:

نختبر المستقيم مع نقطة الأصل أي نعوض  $X_1 = \text{صفر}$  ،  $X_2 = \text{صفر}$

$0+0 \leq 100(\text{true})$  إذن اتجاه المستقيم هو نحو نقطة الأصل ، وهذا يعني ببساطة أن أي نقطة على المستقيم أو بينه و بين نقطة الأصل تحققه. والمنطقة بين المستقيم و نقطة الأصل تسمى منطقة الإمكانيات المتاحة وفق هذا القيد بمعنى أن المنتج يستطيع إنتاج أي كمية ضمن المساحة المظللة و وفق القيد الأول.

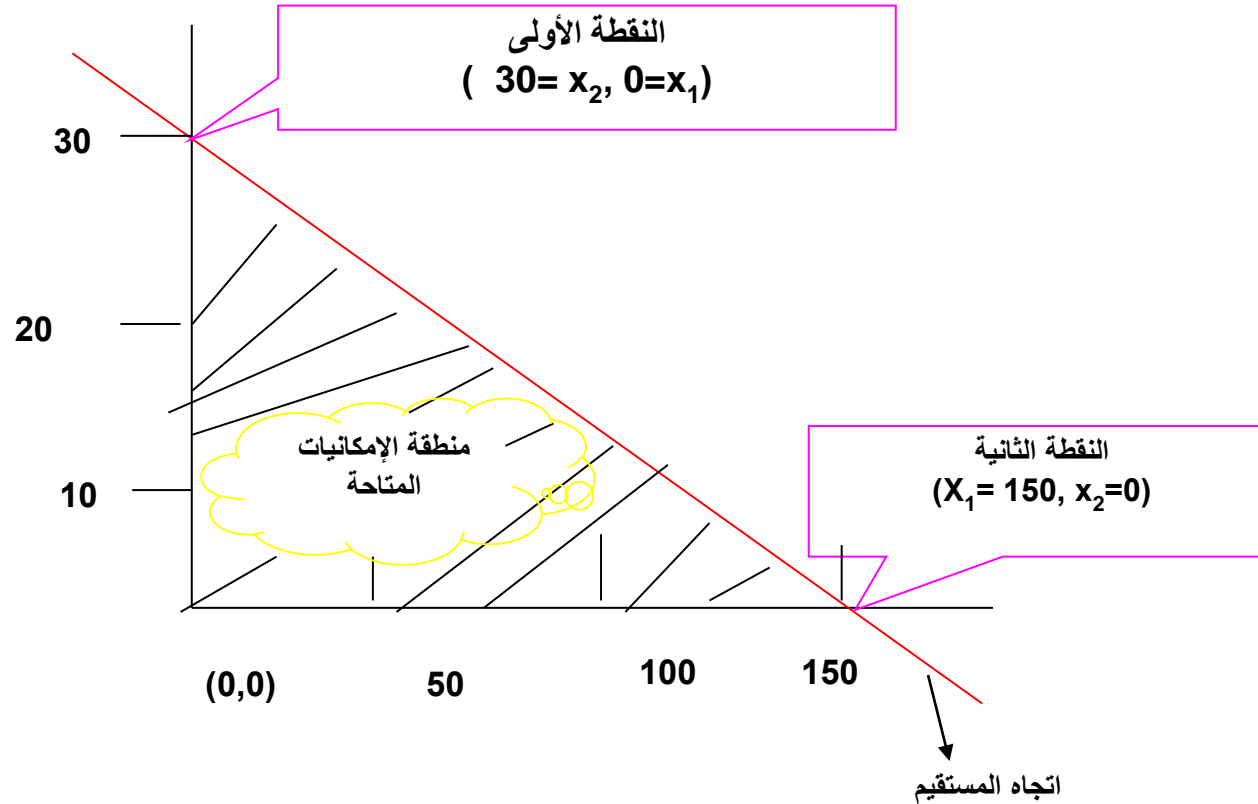
المستقيم الثاني	
$X_2$	$X_1$
30	0
0	150

وتوضيحا لما تعنيه هذه الأرقام:

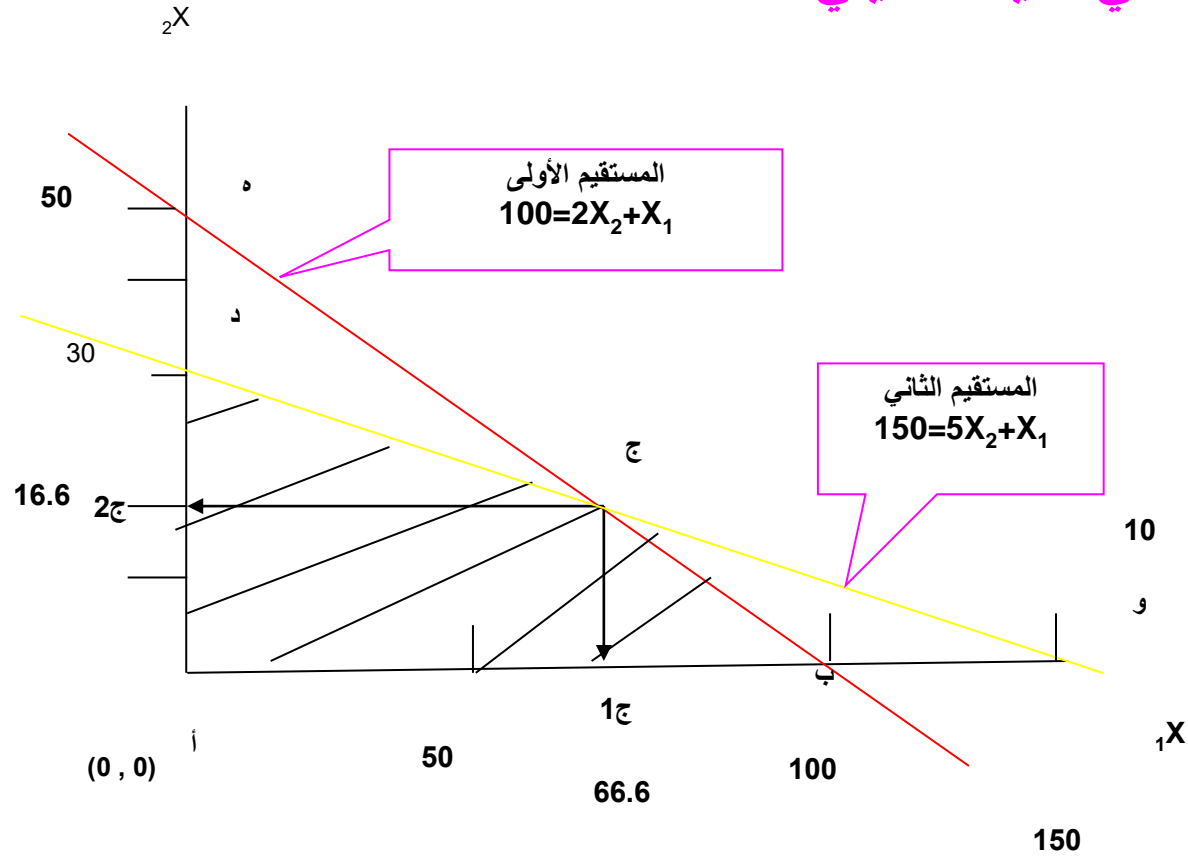
لو فرضنا أن المنتج ركز على إنتاج الطاولات ( $X_2$ ) فقط ، وأهمل إنتاج الكراسي ( $X_1$ ) ، فإنه يستطيع إنتاج 30 طاولة من ساعات العمل المتوفرة لديه ( بفرض أن هذا القيد يمثل ساعات عمل ).

بينما إذا ركز الإنتاج على الكراسي ( $X_1$ ) مهملًا للطاولات ( $X_2$ ) فإنه يستطيع إنتاج 150 كرسي من ساعات العمل المتوفرة لديه

يمكن الآن رسم الإحداثي السيني والصادي وتحديد المستقيم الثاني عليه كما يلي :



ويمكن الآن رسم الإحداثي السيني و الصادي وتحديد المستقيمين الأول والثاني عليه كما يلي:



## المطلب الثاني :

نقوم بداية بتحديد منطقة الإمكانيات المتاحة والتي تحقق كلا المستقيمين ، وهي في هذه الحالة المنطقة أ ب ج د المظلة ، حيث يستطيع المنتج إنتاج أي كمية داخل هذه المنطقة وفق القيدين وهما : الوقت المتاح من العمل و الوقت المتاح من الآلة . والهدف من حل هذه المشكلة هو تحقيق أعلى عائد ممكن ، و بإجراء التجارب وجد أن أعلى عائد يتحقق عند نقاط تقاطع المستقيمات ، لذلك يتم اختبار دالة الهدف عند هذه النقاط ، وهي أ ب ج د .

## ملاحظات :

- أولا : منطقة الإمكانيات المتاحة هي أ ب ج د والتي تحقق كلا المستقيمين .
- ثانيا : خروج منطقة و ب ج من منطقة الإمكانيات المتاحة لأنها تحقق المستقيم الثاني فقط ، ولا تحقق المستقيم الأول.
- ثالثا : خروج منطقة ه د ج من منطقة الإمكانيات المتاحة لأنها تحقق المستقيم الأول فقط ، ولا تحقق المستقيم الثاني.

### المطلب الثالث :

تحديد النقطة التي عندها يكون الربح أعلى ما يكون وذلك من خلال تقييم نقاط تقاطع المستقيمات على أطراف منطقة الإمكانيات المتاحة وكما يلي :

النقطة	$X_1$	$X_2$	$Z=\$10 x_1+\$40 x_2$	النتيجة (\$)
أ	0	0	$0 \times 40 + 0 \times 10$	0
ب	100	0	$0 \times 40 + 100 \times 10$	1000
ج	66.7	16.7	$16.7 \times 40 + 66.7 \times 10$	1335
د	0	30	$30 \times 40 + 0 \times 10$	1200



## ملاحظات على نتيجة الحل:

نلاحظ أن أعلى عائد قد تحقق عند النقطة ج ، أي يجب إنتاج 66.7 كرسي ، و 16.7 طاولة لتحقيق عائد قدره \$1335 ونتيجة أنه لا يمكننا إنتاج كسور من الكراسي أو الطاولات يتم تقريبها للقيمة الأدنى حتى تكون ضمن منطقة الإمكانيات المتاحة .

كما يمكن تحديد مدى استغلال الموارد عند النقطة ج  $X_1=66$  ,  $X_2=16$

القيود	الطاقة المتاحة	معادلة دالة الهدف	المستغل	الفائض
$x_1+2x_2$	100	$2 * 16 + 1 * 66$	98	لا شيء تقريبا
$x_1+5x_2$	150	$5 * 16 + 1 * 66$	146	لا شيء تقريبا