Al-Mustaqbal University College

Department of Medical Instrumentation Technologies

Mathematics II / Second Stage

By

Lecturer.Dr.Diyar Hussain Habeeb

Differential Equations

First order differential equations of first degree:

③ First Order: Linear

وتكون على صيغتين :-

① $\dfrac{dy}{dx} + p(x).y = Q(x)$

حيث ان $p(x)$, $Q(x)$ هما دالتان للـ (x) .

ويكون الحل كالآتي :-

$$\phi = e^{\int p(x)dx}$$

$$\phi . y = \int \phi \, Q \, dx$$

Ex:- Find a general solution of each the following equations:- أس الـ y = 1

① $\dfrac{dy}{dx} + 2y = e^{-x}$ linear D.E

عدد

$p = 2 \; , \; Q = e^{-x}$

$$\phi = e^{\int p\,dx} = e^{\int 2\,dx} = e^{2x}$$

$$y\phi = \int \phi \, Q \, dx$$

$$ye^{2x} = \int e^{2x} . e^{-x} \, dx = \int e^{x} \, dx$$

$$y e^{2x} = e^{x} + c$$

③ $x\frac{dy}{dx}+3y=\frac{\sin x}{x^2} \quad \div x$

$$\frac{dy}{dx}+\frac{3}{x}y=\frac{\sin x}{x^3} \qquad \text{linear D.E}$$

$$P=\frac{3}{x}\quad , \quad Q=\frac{\sin x}{x^3}$$

$$\phi=e^{\int\frac{3}{x}dx}=e^{3\ln x}=e^{\ln x^3}=x^3$$

$$\phi y=\int\phi\, Q\,dx \Rightarrow x^3y=\int x^3\frac{\sin x}{x^3}dx$$

$$x^3y=\int \sin x\,dx \Rightarrow x^3y=-\cos x+C$$

HW

$$(2y+x^2)\,dx=x\,dy$$

④ First Order : Exact

$M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0 \longrightarrow$ الصيغة العامة

أن هذه المعادلة تكون (Exact) اذا كان :-

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

رقما وإشارة

وخلاف ذلك فأن المعادلة تكون غير (Exact) :-

بعد أختبار المعادلة وكانت (Exact) فيكون الحل كالاتي :-

$$\int_{a}^{x} M(x,y)\,dx + \int_{b}^{y} N(x,y)\,dy = \int 0 = c$$

كل y يعتبر ثابت

ملاحظة مهمة جداً :- قبل أجراء التكامل اعلاه يجب ان نعوض في الحد الثاني ($\int N(x,y)dy$) بدل كل (x) بـ (a) ثم نجري التكامل

Ex:- Show that the following equations are exact and solve each one:-

(1)- $(2x+3y-2)\,dx + (3x-4y+1)\,dy = 0$

$$M = 2x+3y-2 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 3$$
$$N = 3x+4y-1 \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 3$$

$$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 3 \qquad \text{Exact}$$

$$\int_{a}^{x} M\,dx + \int_{b}^{y} N\,dy = c$$

$$\int_{a}^{x} (2x+3y-2)\,dx + \int_{b}^{y} (3a-4y+1)\,dy = c$$

$$\left[x^2+3yx-2x\right]_a^x + \left[3ay-2y^2+y\right]_b^y = c$$

$$\left[(x^2+3yx-2x)-(a^2+3ya-2a)\right]+\left[(3ay-2y^2+y)-(3ab-2b^2+b)\right] = c$$

$$x^2+3yx-2x-a^2-\cancel{3ya}+2a+\cancel{3ay}-2y^2+y-3ab+2b^2+b = c$$

$$x^2+3yx-2x-2y^2+y = c+a^2-2a+3ab-2b^2-b$$

$$\therefore x^2+3y-2x-2y^2+y = k$$

HW

$$(y^2-1)\,dx + (2xy - \sin y)\,dy = 0$$

Integration Factor

في حالة أختبار العادلة التفاضلية المعطاة بطريقة (Exact) وكانت $\left(\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}\right)$ فأن المعادلة تحل بطريقة الـ (Exact) .

أما اذا كانت $\left(\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}\right)$ فأن العادلة هي ليست (Exact) وهنا يجب تدقيق هل المعادلة (linear , Homog , variable) . فأذا كانت جميع هذه الطرق غير مناسبة لحل هذه المعادلة فيجب ان تضرب هذه المعادلة بعامل يسمى (Integration Factor) لكي تتحول المعادلة الى (Exact) .

ولغرض أيجاد (I.F) يتم ذلك بطريقتين أيهما أسهل تستعمل في الحل :

① - $I.F = e^{\int F(x)\,dx}$

$$\text{where: } \quad F(x) = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$$

عز التأكيد

② - $I.F = e^{-\int F(y)\,dy}$

$$\text{where } \quad F(y) = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M}$$

$\underline{\underline{Ex:-}}$ $(x^2+y^2+x)\,dx + xy\,dy = 0$

$$M = x^2+y^2+x \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 2y$$
$$N = xy \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = y$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x} \longrightarrow \text{The eq. is not exact.}$$

we must Find I.F

$$F(x) = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{2y-y}{xy} = \frac{y}{xy} = \frac{1}{x}$$

$$I.F = e^{\int F(x)dx} = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln x} = x$$

$$\therefore (x^2+y^2+x)\,dx + xy\,dy = 0 \quad * \; I.F = x$$
$$(x^3+xy^2+x^2)\,dx + x^2y\,dy = 0$$

وللتحقق من أن العادلة أصبحت (Exact).

$$M = x^3+xy^2+x^2 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 2xy$$
$$N = x^2y \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 2xy$$
$\rightarrow$ Exact.

نفكر بقلب المعادلة عند

$\int$ صفر $= \int$ صفر

ولكن عند وجود اكثر من صفر لا نقلب

$$\int_a^x (x^3+xy^2+x^2)\,dx + \int_b^y x^2y\,dy = c$$

$$\int_a^x (x^3+xy^2+x^2)\,dx + \int_b^y a^2y\,dy = c$$

أكمل الحل