المحاضرة الثالثة
٧/٥/٢٠٢٢
السبت

Limit الغاية

$\lim_{x\to a} f(x) = L \to$ (تمثل غاية الدالة ودائماً يكون عدد حقيقي)

* تكون الغاية موجودة (exist) اذا كانت الغاية من جهة اليمين = الغاية من جهة اليسار أي

$\lim_{x\to a^+} f(x) = L_1$ ← تمثل الغاية من جهة اليمين

$\lim_{x\to a^-} f(x) = L_2$ ← تمثل الغاية من جهة اليسار

تمثل غاية الدالة ودائماً تكون عدد حقيقي

$\therefore$ (exist) موجودة اذا $L_1 = L_2$

(not exist) غير موجودة اذا $L_1 \neq L_2$

* خواص الغايات

جمع، طرح، قسمة، ضرب، دالة اسية

* كيفية ايجاد غاية الدالة

① الحل اذا كان قيمة محددة ينتهي بمجرد التعويض

② اذا كان قيمة غير محددة $\frac{\infty}{\infty}$ او $\frac{0}{0}$ نتبع الخطوات التالية

③ اذا كان $\frac{0}{0}$ اما تحلل او ضرب المرافق

(A) تحلل / اما فرق مربعين (a^2-b^2)

$(a-b)(a+b$

او فرق بين مكعبين $(a^3-b^3)(a^2+ab+b^2)$

- او حسب القانون التالي اذا كانت تشبه القانون

$$\boxed{\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = n a^{n-1}}$$

$\left[0 = \frac{0}{\text{كمية}} \right]$ ، $\infty = \infty^4, \infty^3$ ، $\left[\infty = \frac{\text{كمية}}{0} \right]$ Ⓑ

قانون (خاصية) $\left[0 = \frac{\text{كمية}}{\infty} \right]$

ملاحظة مهمة جداً

∞ عند الضرب او الجمع او الطرح = ∞

Ⓑ $\left(\frac{\infty}{\infty} \right)$ حل المشكلة

نقسم كل من البسط والمقام على (x) المرفوعة لاكبر اس في المقام او البسط [اي نختار اكبر اس نقسم عليه سواء في البسط او المقام]

Ex: $\lim_{x \to \infty} \frac{x^4}{1 + x^3}$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^4}{1 + x^3} \right) = \frac{\infty^4}{1 + \infty^3} = \frac{\infty}{\infty}$$

∴ نقسم كل من البسط والمقام على x المرفوعة لاكبر اس في البسط

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^4}{1 + x^3} \right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^4 / x^4}{1 / x^4 + x^3 / x^4} \right) = \frac{1}{\frac{1}{\infty^4} + \frac{1}{\infty}}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty}} = \frac{1}{0 + 0} = \frac{1}{0} = \infty$$

∴ الغاية غير موجودة

(not exicit

الاستمرارية

اذا كانت $f(x)$ دالة بالمتغير X و (a) ثابت ينتمي الى مجال الدالة (f) يقال ان الدالة (f) مستمرة عند $(X=a)$ اذا تحققت الشروط الثلاثة

① $f(a) \in R$ الدالة معرفة ، $R=$ مجموعة الاعداد الحقيقية

② $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ ~~xxxx~~ موجودة الغاية

③ $f(a) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$

~~Examples~~ # properties of limit

خواص الغايات :

اذا كانت $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$, $\lim\limits_{x \to a^+} g(x) = M$, n, m, c = ثوابت

① $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \mp g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \mp \lim\limits_{x \to a} g(x) = L \mp M$

② $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x) = L \cdot M$

③ $\lim\limits_{x \to a} C f(x) = C \lim\limits_{x \to a} f(x) = CL$ ثابت

④ $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = \frac{L}{M}$

⑤ $\lim\limits_{x \to a} (f(x))^{\frac{n}{m}} = (\lim\limits_{x \to a} f(x))^{\frac{n}{m}} = L^{\frac{n}{m}}$ $= m + C$

⑥ $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim\limits_{x \to a} f(x)} = \lim\limits_{x \to a} (f(x))^{1/2} = \lim\limits_{x \to a} f(x)$

⑦ $\lim\limits_{x \to a} (C) = C$ $\; : f(x) = C$

Examples

① $\lim_{x \to 3} \frac{x-1}{x+1} \Rightarrow \frac{\lim_{x \to 3} (x-1)}{\lim_{x \to 3} (x+1)}$

$$= \frac{3-1}{3+1} = \frac{1}{2}$$

② $\lim_{x \to 2} \sqrt{x+4} \Rightarrow \sqrt{\lim_{x \to 2} (x+4)}$

$$= \sqrt{2+4} = \sqrt{6}$$

③ $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} \Rightarrow \frac{\lim_{x \to 1} (x^2-1)}{\lim_{x \to 1} (x-1)}$

$$= \frac{(1)^2-1}{1-1} = \frac{0}{0}$$

∴ يجب أن نحلل الدالة لأن الناتج النهائي $\frac{0}{0}$

∴ اما نحلل الدالة او حسب القانون

حسب قانون الفرق بين مربعين

$(a^2-b^2) = (a-b)(a+b)$

$\therefore \lim_{x \to 1} \left(\frac{x^2-1}{x-1}\right) = \lim_{x \to 1} \left(\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}}\right)$

$$= \lim_{x \to 1} (x+1) \rightarrow 1+1$$

$$= 2$$

(*i*) $\lim_{x \to a} c = c$, where c is a constant

(*ii*) $\lim_{x \to a} x = a$

EXAMPLE 1 Using Theorem 2.2.1

(a) From Theorem 2.2.1(*i*),

$$\lim_{x \to 2} 10 = 10 \qquad \text{and} \qquad \lim_{x \to 6} \pi = \pi.$$

(b) From Theorem 2.1.1(*ii*),

$$\lim_{x \to 2} x = 2 \qquad \text{and} \qquad \lim_{x \to 0} x = 0.$$

■

The limit of a constant multiple of a function f is the constant times the limit of f as x approaches a number a.

Theorem 2.2.2 Limit of a Constant Multiple

If c is a constant, then

$$\lim_{x \to a} cf(x) = c \lim_{x \to a} f(x).$$

We can now start using theorems in conjunction with each other.

EXAMPLE 2 Using Theorems 2.2.1 and 2.2.2

From Theorems 2.2.1 (*ii*) and 2.2.2,

(a) $\lim_{x \to 8} 5x = 5 \lim_{x \to 8} x = 5 \cdot 8 = 40$

(b) $\lim_{x \to -2} \left(-\frac{3}{2}x\right) = -\frac{3}{2} \lim_{x \to -2} x = \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot (-2) = 3.$

■

The next theorem is particularly important because it gives us a way of computing limits in an algebraic manner.

④ $\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3}$

$$= \frac{(3)^3 - 27}{3 - 3} = \frac{0}{0}$$

ـ هذا المثال يحل بطريقتين اما بالتحليل ، وحسب لقانون قانون الفرق بين مكعبين

$$(a^3 - b^3) = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$\therefore \lim_{x \to 3} \left(\frac{x^3 - 27}{x - 3}\right) = \lim_{x \to 3} \left(\frac{(x-3)(x^2 + 3x + 9)}{(x-3)}\right)$$

$$= \lim_{x \to 3} (x^2 + 3x + 9)$$

$$= 3^2 + 3 \cdot (3) + 9 = 9 + 9 + 9 = \underline{27}$$

او الطريقة الاخرى للحل حسب القانون

$$\therefore \frac{x^3 - 27}{x - 3} = \frac{x^3 - 3^3}{x - 3} = \frac{x^n - a^n}{x - a}, \quad n = 3, \; a = 3$$

والقانون ـ

$$\left[\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = n a^{n-1}\right]$$

$$\therefore \lim_{x \to 3} \left(\frac{x^3 - 27}{x - 3}\right) = \lim_{x \to 3} \left(\frac{x^3 - 3^3}{x - 3}\right)$$

$$= 3 \cdot 3^{3-1} = 3 \cdot 3^2 = 27$$

5. $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x}$

$\lim_{x \to \infty} = \frac{1}{\infty} = 0$

Note

$\frac{\text{كمية}}{\infty} = 0$

قيمة ∞ عند الضرب، الجمع، الطرح $= \underline{\underline{\infty}}$

6. $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x}{7x+4} \right)$

$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x}{7x+4} \right) = \frac{\infty}{7.\infty+4} = \frac{\infty}{\infty}$

∴ نقسم كل من البسط والمقام على (x) المرفوعة لأكبر أس في المقام

$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x}{7x+4} \right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{\cancel{\frac{x}{x}}}{\frac{7\cancel{x}}{\cancel{x}} + \frac{4}{x}} \right)$

$= \lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{7+\frac{4}{\infty}} \right) = \frac{1}{7+0} = \frac{1}{7}$

7) $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{5x+3}{2x^2-1} \right) \Rightarrow \lim_{x \to \infty} \left(\frac{5x+3}{2x^2-1} \right) = \frac{5.\infty+3}{2.\infty^2-1} = \frac{\infty}{\infty}$

∴ نقسم كل من البسط والمقام على (x) المرفوعة لأكبر أس في المقام

$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{5x+3}{2x^2-1} \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{5x}{x^2} + \frac{3}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{5}{x} + \frac{3}{x^2}}{2 - \frac{1}{x^2}}$

$= \frac{\frac{5}{\infty} + \frac{3}{\infty^2}}{2 - \frac{1}{\infty^2}} = \frac{0+0}{2-0} = 6$

8) $\lim_{x \to \infty} \sqrt{x^2+1}$

$\lim_{x \to \infty} \sqrt{\infty^2+1} = \infty$

∴ الغاية غير موجودة

Scanned by TapScanner

Examples about Continuity

Ex if $f(x) = x^3 + 3$ continuity at $x=1$

Sol

∵ الدالة متعددة الحدود ، ∴ مجال الدالة (f) هو مجموعة الاعداد الحقيقية R وبالتالي $1 \in R$

الدالة معرفة → ① $\because f(x) = x^2 + 3$

$f(1) = (1)^2 + 3 = 4 \in R$

② $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} (x^2 + 3)$

$= (1)^2 + 3 = 1 + 3 = 4$

∴ الغاية موجودة

③ $f(1) = 4 = \lim_{x \to 1} (f(x) = x^2 + 3)$

∴ الدالة (f) مستمرة عند $x = 1$

Ex $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

Sol

بما أن الدالة (f) كسرية ، ∴ مجال الدالة هو جميع الاعداد الحقيقية عدا التي تجعل المقام يساوي صفر .

في هذه الحالة يكون المقام مساوي للصفر أي ان $x+1=0$

اذا كان $x = -1$ ، لذلك مجال الدالة f $R \setminus \{-1\}$

وبالتالي $3 \in R \setminus \{-1\}$

① $\because f(x) = \dfrac{x}{x+1} \to f(3) = \dfrac{3}{3+1} = \dfrac{4}{3}$ ∴ الدالة معرفة

② $\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \dfrac{x}{x+1} = \dfrac{\lim_{x \to 3} (x)}{\lim_{x \to 3} (x+1)} = \dfrac{3}{3+1} = \dfrac{3}{4}$

∴ الغاية موجودة

③ $f(3) = \dfrac{3}{4} = \lim_{x \to 3} \left(\dfrac{x}{x+1}\right)$

∴ الدالة (f) مستمرة