المحاضرة الأولى

الاشتقاق Differentiation

1) $f(x) = x$	$\Longrightarrow$	$f'(x) = 1$
2) $f(x) = x^2$	$\Longrightarrow$	$f'(x) = 2x$
3) $f(x) = x^3$	$\Longrightarrow$	$f'(x) = 3x^2$
4) $f(x) = x^4$	$\Longrightarrow$	$f'(x) = 4x^3$
5) $f(x) = x^5$	$\Longrightarrow$	$f'(x) = 5x^4$
6) $f(x) = 2x$	$\Longrightarrow$	$f'(x) = 2$
7) $f(x) = 3x^2$	$\Longrightarrow$	$f'(x) = 6x$
8) $f(x) = 5x^3$	$\Longrightarrow$	$f'(x) = 15x^2$
9) $f(x) = x^{-2}$	$\Longrightarrow$	$f'(x) = -2x^{-3}$
10) $f(x) = x^{-3}$	$\Longrightarrow$	$f'(x) = -3x^{-4}$
11) $f(x) = x^{-4}$	$\Longrightarrow$	$f'(x) = -4x^{-5}$
12) $f(x) = 3x^{-5}$	$\Longrightarrow$	$f'(x) = -15x^{-6}$

مشتقة الجذور

1) $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

2) $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

3) $f(x) = \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}} \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$

4) $f(x) = \sqrt[5]{x} = x^{\frac{1}{5}} \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}$

5) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}} \Longrightarrow f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$

6) $f(x) = \sqrt[5]{x^3} = x^{\frac{3}{5}} \Longrightarrow f'(x) = \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}$

7) $f(x) = \sqrt[3]{x^{-2}} = x^{-\frac{2}{3}} \Longrightarrow f'(x) = -\frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}$

٣ ـ مشتقة دوال كثيرة الحدود

$$f(x) = h(x) \mp g(x) \Longrightarrow f'(x) = h'(x) \mp g'(x)$$

1) $f(x) = 3x^5 + 7x \Longrightarrow f'(x) = 15x^4 + 7$

2) $f(x) = 3x^4 - 4x^2 + 6 \Longrightarrow f'(x) = 12x^3 - 8x$

3) $f(x) = 2x^2 + \frac{1}{2}x \Longrightarrow f'(x) = 4x + \frac{1}{2}$

4) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{3}x^3 + 9 \Longrightarrow f'(x) = x - 4x^2$

5) $f(x) = \frac{1}{5}x^{-2} - \frac{2}{7}x^{-3} + 9 \Longrightarrow f'(x) = \frac{-2}{5}x^{-3} + \frac{6}{7}x^{-4}$

٤ـ مشتقة حاصل ضرب دالتين = الاولى في مشتقة الثانية + الثانية في مشتقة الاولى

$$f(x) = g(x) \cdot h(x) \longrightarrow f'(x) = g(x) \cdot h'(x) + h(x) \cdot g'(x)$$

مثال / جد المشتقة للدالة $f(x) = (x^4 - x^2 + 1)(5x^6 - 3x)$

الحل /

$$f(x) = (x^4 - x^2 + 1)(5x^6 - 3x)$$
$$f'(x) = (x^4 - x^2 + 1)(30x^5 - 3) + (5x^6 - 3x)(4x^3 - 2x)$$

مثال / جد المشتقة للدالة $f(x) = (4 - x)(x^2 + 3)$ **عند** $x = 2$

الحل /

$$f(x) = (4 - x)(x^2 + 3)$$
$$f'(x) = (4 - x)(2x) + (x^2 + 3)(-1)$$
$$f'(2) = (4 - 2)(2(2)) + (2^2 + 3)(-1) = 2(4) + (7)(-1) = 8 - 7 = 1$$

٥ـ مشتقة حاصل قسمة دالتين $= \frac{\text{المقام في مشتقة البسط - البسط في مشتقة المقام}}{\text{المقام}^2}$

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \longrightarrow f'(x) = \frac{h(x).g'(x) - g(x).h'(x)}{(h(x))^2}$$

مثال / جد المشتقة للدالة $f(x) = \frac{x^3+1}{x^4+1}$ **عند** $x = 1$

الحل/

$$f'(x) = \frac{(x^4+1)(3x^2) - (x^3+1)(4x^3)}{(x^4+1)^2}$$

$$f'(1) = \frac{(1^4+1)(3\times1^2) - (1^3+1)(4\times1^3)}{(1^4+1)^2} = \frac{2\times3 - 2\times4}{2^2} = \frac{6-8}{4} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

مثال / جد المشتقة للدالة $f(x)=\frac{4-5x}{x^2+x+1}$ عند $x=-1$

الحل/

$$f'(x)=\frac{(x^2+x+1)(-5)-(4-5x)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}$$

$$f'(-1)=\frac{((-1)^2+(-1)+1)(-5)-(4-5(-1))(2(-1)+1)}{((-1)^2+(-1)+1)^2}$$

$$f'(-1)=\frac{(1-1+1)(-5)-(4+5)(-2+1)}{(1-1+1)^2}=\frac{-5-(9)(-1)}{1}=-5+9=4$$

٦- مشتق القوس مرفوعة الى أس = الاس في القوس مرفوع الى الأس -١ في مشتقة داخل القوس

$$f(x)=[h(x)]^n \longrightarrow f'(x)=n[h(x)]^{n-1}(h'(x))$$

مثال / جد المشتقة الدوال الآتية $f(x)=(1-x)^3$

الحل /

$$f'(x)=3(1-x)^2(-1)=-3(1-x)^2$$

مثال / جد المشتقة للدالة $f(x)=(x^3+x^2+x+1)^5$

الحل /

$$f'(x)=5(x^3+x^2+x+1)^4(3x^2+2x+1)$$

مثال / اذا كانت $f(x)=(x^2-3)^4$ جد $f'(x)$, $f''(x)$ عند $x=2$

الحل /

$$f'(x)=4(x^2-3)^3(2x)=8x(x^2-3)^3$$

$$f'(2)=8(2)(2^2-3)^3=16(1)^3=16$$

$$f''(x)=8x(3)(x^2-3)^2(2x)+(x^2-3)^3(8)$$

$$f''(x)=48x^2(x^2-3)^2+8(x^2-3)^3$$

$$f''(2)=48(2)^2(2^2-3)^2+8(2^2-3)^3=192+8=200$$

ملاحظة / مشتقة الجذر التربيعي = مشتقة داخل الجذر على ٢ في الجذر

$$f(x)=\sqrt{\quad} \longrightarrow f'(x)=\frac{\text{مشتقة داخل الجذر}}{2\sqrt{\quad}}$$

مثال / اذا كانت $f(x)=\sqrt{x^3+x^2-5}$ **جد** $f'(x)$

الحل /

$$f'(x)=\frac{3x^2+2x}{2\sqrt{x^3+x^2-5}}$$

مثال / اذا كانت $f(x)=\sqrt{x^2-2x+1}$ **جد** $f'(x)$

الحل /

$$f'(x)=\frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+1}}$$

مثال / جد المشتقة للدالة $y=x^4+5x^3+3$ **جد** $y',\ y''$

الحل

$$y'=4x^3+15x^2$$
$$y''=12x^2+30x$$

مثال /اذا كانت $f(x)=2x^3+4+\frac{3}{x}$ **جد** $f'(x)\ ،\ f''(x)\ ،\ f''(-1)$

الحل/

$$f(x)=2x^3+4+3x^{-1}$$

$$f'(x)=6x^2-3x^{-2} \longrightarrow f'(x)=6x^2-\frac{3}{x^2}$$

$$f''(x)=12x+6x^{-3} \longrightarrow f''(x)=12x+\frac{6}{x^3}$$

$$f''(-1)=12(-1)+\frac{6}{(-1)^3}=-12-6=-18$$

مثال / جد المشتقة للدالة $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$ **عند** $x=0$

الحل /

$$f(x)=(2x+1)^{\frac{-1}{2}}$$

$$f'(x)=\frac{-1}{2}(2x+2)^{\frac{1}{2}}(2)=-\sqrt{2x+1}$$

$$f'(0)=-\sqrt{2(0)+1}=-\sqrt{1}=-1$$

س٣ / جد المشتقة للدالة $f(x)=\left(\frac{x}{x+1}\right)^4$ **عند** $x=1$

الحل /

$$f'(x)=4\left(\frac{x}{x+1}\right)^3\left(\frac{(x+1)(1)-x(1)}{(x+1)^2}\right)$$

$$f'(1)=4\left(\frac{1}{1+1}\right)^3\left(\frac{(1+1)(1)-1(1)}{(1+1)^2}\right)$$

$$f'(1)=4\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{2-1}{4}\right)=4\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$$

مثال / جد المشتقة للدالة $f(x)=x+\frac{3}{x^2+1}$ **عند** $x=-1$

الحل /

$$f'(x)=1+\frac{-3(2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x)=1-\frac{6x}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(-1)=1-\frac{6(-1)}{((-1)^1+1)^2}=1+\frac{6}{(2)^2}$$

$$=1+\frac{6}{(2)^2}=1+\frac{6}{4}=\frac{4+6}{4}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$$

س٣/ اذا كانت $f(x)=(x^3+3x^2-3)^{\frac{3}{2}}$ $f'(x)\ ,f'(2)$

الحل /

$$f'(x)=\frac{3}{2}(x^3+3x^2-3)^{\frac{1}{2}}(3x^2+6x)=\frac{3}{2}(3x^2+6x)\sqrt{x^3+3x^2-3}$$

$$f'(2)=\frac{3}{2}(3(2)^2+6(2))\sqrt{2^3+3(2)^2-3}$$

$$=\frac{3}{2}(12+12)\sqrt{8+12-3}=\frac{3}{2}(24)\sqrt{17}=36\sqrt{17}$$