Limits الغايات

غاية الدالة $f(x)$ هو التعبير عن سلوك الدالة عندما نقترب x من قيمة معينة، لتكن a ، ويعبر عنها بـ:

$\lim f(x) = L$ حيث L عدد حقيقي يمثل غاية الدالة

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ ، $\lim_{x \to a^-} f(x) = R$

الغاية من جهة اليسار — الغاية من جهة اليمين

ونقول أن غاية الدالة f موجودة اذا كانت $L = R$ ، غير موجودة اذا كانت $R \neq L$.

خواص الـ limit

اذا كانت $\lim_{x \to a} f(x) = L$ ، $\lim_{x \to a} g(x) = M$ ، n, m, c ثوابت

① $\lim_{x \to a} (f(x) \mp g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = L + M$

② $\lim_{x \to a} (f(x) * g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) * \lim_{x \to a} g(x) = L \cdot M$

③ $\lim_{x \to a} cf(x) = c \lim_{x \to a} f(x) = cL$

④ $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{L}{M}$

⑤ $\lim_{x \to a} f(x)^{\frac{n}{m}} = \left(\lim_{x \to a} f(x)\right)^{n/m} = L^{\frac{n}{m}}$ ، $m \neq 0$

⑥ $\lim_{x \to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x \to a} f(x)}$ or $\lim_{x \to a} (f(x))^{1/2}$

⑦ $\lim_{x \to a} (c) = c$

Scanned with CamScanner

ايجاد غاية الدالة $f(x)$

لايجاد الدالة $f(x)$ نعوض القيمة a التي يؤول اليها المتغير X في الدالة f.. يكون ناتج التعويض أما كمية محددة (ثابت) او كمية غير محددة

- كمية غير محددة ← نعالج او نتعامل مع الدالة.
- كمية محددة ← ينتهي الحل

مثل $\frac{\infty}{\infty}$ او $\frac{0}{0}$.

① اذا كان ناتج التعويض $\frac{0}{0}$ نقوم بالآتي:-

- خلال البسط، القيام بـ احدى طرق التحليل:-
  - ✱ تجربة
  - ✱ عامل مشترك
  - ✱ فرق بين مربعين
  - ✱ طرق بين مكعبين

② اذا كان ناتج التعويض $\frac{\infty}{\infty}$ نقوم بالآتي:

نقسم البسط والمقام على اكبر اس لـ X

امثلة

ex1/ find the limit of the function $f(x) = 1-x^2$ when $x \to 0$

$$\lim_{x \to 0} (1-x^2) = 1-0^2 = 1$$

ex2/ $\lim (x^2+3)$

$$\lim_{x \to 1} (x^2+3) = 1^2+3 = 4$$

Scanned with CamScanner

ex3/ $\lim_{x \to 3} \frac{x-1}{x+1}$

$$\frac{\lim_{x \to 3} x-1}{\lim_{x \to 3} x+1} = \frac{3-1}{3+1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

ex4/ $\lim_{x \to 2} \sqrt{x+2}$

$$\sqrt{\lim_{x \to 2} (x+2)} = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$$

ex5/ $\lim_{x \to 2} (x+1)(x^2-1)$

$(2+1)(2^2-1) \Rightarrow = (3)(3) = 9$

ex6/ $\lim_{x \to 0} \frac{x^2-2}{3+x}$

$$= \frac{0^2-2}{3+0} = \frac{-2}{3}$$

ex7/ $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x}$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\infty} = 0$$

$\frac{\text{كمية}}{\infty} = 0$ ملاحظة / اي كمية مقسومة على ∞ = 0

ملاحظة / اي كمية مقسومة على 0 = ∞

$\frac{\text{كمية}}{0} = \infty$

Scanned with CamScanner

ex 8/ $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$

$\frac{\lim_{x \to 1} x^2-1}{\lim_{x \to 1} x-1} = \frac{1^2-1}{1-1} = \frac{0}{0}$ ∴ خالة الدالة

$\lim_{x \to 1} \left(\frac{x^2-1}{x-1}\right) = \lim_{x \to 1} \left(\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)}\right) = x+1$

$= 1+1 = 2$

ex 9/ $\lim_{x \to 3} \left(\frac{x^3-27}{x-3}\right) = \frac{3^3-27}{3-3} = \frac{0}{0}$ خالة الدالة

$\lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x-3)} \Rightarrow \lim_{x \to 3} (x^2+3x+9)$

$3^2+3(3)+9 = 27$

ex 10/ $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x}{7x+4}\right) \Rightarrow \frac{\infty}{7(\infty)+4} = \frac{\infty}{\infty}$

نقسم على اكبر اس لـ x

$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x/x}{\frac{7x+4}{x}}\right) \Rightarrow \lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{7+\frac{4}{x}}\right)$

$= \frac{1}{7+\frac{4}{\infty}} = \frac{1}{7+0} = \frac{1}{7}.$

Scanned with CamScanner

ex11/ $\lim_{x\to\infty} \frac{5x+3}{2x^2-1} \Rightarrow \frac{5(\infty)+3}{2\infty^2-1} = \frac{\infty}{\infty}$

$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{5x}{x^2}+\frac{3}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{5/x+3/x^2}{2-\frac{1}{x^2}}$

$= \frac{5/\infty+3/\infty^2}{2-\frac{1}{\infty^2}} = \frac{0+0}{2-0} = \frac{0}{2} = 0.$

الصفر هو عدد حقيقي وهو نهاية الدالة.

ex12/ $\lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{1+x^3} \Rightarrow \frac{\infty^4}{1+\infty^3} = \frac{\infty}{\infty}$

$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4/x^4}{\frac{1}{x^4}+x^3/x^4} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^4}+1/x} \Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{\infty^4}+\frac{1}{\infty}}$

$= \frac{1}{0+0} = \frac{1}{0} = \infty$ ∴ النهاية غير موجودة.

ex12/ $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+1}$

$\lim_{x\to\infty} \sqrt{\infty^2+1} = \infty$ ∴ النهاية غير موجودة.

Scanned with CamScanner

ex13/ $\lim_{x\to 0} \frac{5x^3+8x^2}{3x^4-16x^2} \Rightarrow \frac{3(0)^3+8(0)^2}{3(0)^4-16(0)^2} = \frac{0}{0}$

طريقة أخرى $\lim \frac{x^2[5x+8]}{x^2[3x^2-16]} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{5x+8}{3x^2-16}$

$\frac{5(0)+8}{3(0)^2-16} = \frac{-8}{16} = \frac{-1}{2}$.

ex14/ $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-5x+6}$

$\lim_{x\to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{(x-3)(x-2)} \Rightarrow \lim_{x\to 2} \frac{x+2}{x-3}$

$\frac{2+2}{2-1} = \frac{4}{-1} = -4$.

ex15/ $\lim_{x\to a} \frac{x^3-a^3}{x^4-a^4} \Rightarrow \frac{a^3-a^3}{a^4-a^4} = \frac{0}{0}$

$\lim_{x\to a} \frac{(x-a)(x^2+ax+a^2)}{(x^2-a^2)(x^2+a^2)} \overset{\lim_{x\to a}}{\Rightarrow} \frac{(x-a)(x^2+ax+a^2)}{(x-a)(x+a)(x^2+a^2)}$

$\lim_{x\to a} \frac{x^2+ax+a^2}{(x+a)(x^2+a^2)}$

$= \frac{a^2+a^2+a^2}{(a+a)(a^2+a^2)} = \frac{3a^2}{(2a)(2a^2)} = \frac{3a^2}{4a^3}$

$= \frac{3}{4a}$, $a \neq 0$

Scanned with CamScanner