محاضرات رياضيات الاعمال 1

المرحلة الاولى

قسم إدارة الاعمال

م. د. ايناس رضا علي

الفصل الاول

المجموعات The sets

سنتطرق في هذا الفصل الى دراسة نظرية المجموعات من ناحية لغتها ، خواصها وتطبيقاتها في مجال الادارة .

١٠١ تعاريف ومفاهيم اساسية

تعريف : المجموعة هي تجمع من أشياء متمايزة ومعرفة تعريفاً جيداً . وهذه الاشياء تمثل عناصر او اعضاء المجموعة .

فعندما تقول المجموعة X ومجموعة اخرى Y فنحن عادة نميز بين المجموعتين X و Y بنوع أو صفة العناصر الموجودة في كل منهما .

مثال (١)

ومن الامثلة على ذلك :ـ

أ . فريق كرة الطائرة يمثل مجموعة عناصرها اعضاء الفريق .

ب . طلبة قسم المحاسبة يمثل مجموعة عناصرها طلبة القسم المذكور .

جـ . مجموعة المجلات الأسبوعية الصادرة في بغداد تمثل مجموعة . مجلة الف باء هي احدى اعضائها . بينما مجلة التايم الامريكية ليست عضو فيها .

د . مجموعة الاعداد الطبيعية المحصورة بين العدد 5 و 10 تمثل مجموعة عناصرها 6 ، 7 ، 8 ، 9 .

د . مجموعة المحافظات العراقية التي تبدأ أسمائها بحرف الباء تمثل مجموعة محافظة بغداد هي احدى اعضائها وكذلك بابل ... الخ .

و- مجموعة الناس الاذكياء لاتمثل بالواقع مجموعة لأن فكرة الذكاء هي غير معرفة تعريفاً جيداً فبعض الاشخاص يمكن ان يصنفوا اذكياء من قبل بعض الناس وقد لا يصنفوا كذلك من قبل البعض الآخر.

ز- مجموعة اللوحات الجميلة هي الاخرى مجموعة غير معرفة تعريفاً جيداً وبذلك لايمكن اعتبارها مجموعة.

جرت العادة للرمز للمجموعات بالحروف الكبيرة C , B , A ولعناصرها بالحروف الصغيرة c, b, a. فاذا فرضنا ان العنصر a هو احد عناصر المجموعة A فان a ينتمي الى المجموعة A ونكتب ذلك بالشكل التالي $a \in A$ وتقرأ (a ينتمي الى المجموعة A).

اما اذا كان العنصر a ليس من عناصر المجموعة A فإن a لا ينتمي الى المجموعة A ونكتب ذلك بالشكل التالي

$$a \notin A$$

وتقرأ (a لاتنتمي الى المجموعة A).

مثال (2)

لتكن لدينا المجموعة $A = \{9, 0, 8, 5\}$ عناصر هذه المجموعة هي 9, 8, 5 , 0 وعليه فان $8 \in A$ و $0 \in A$ ولكن $4 \notin A$ وكذلك $6 \notin A$ توجد طرق مختلفة للتعبير عن عناصر المجموعة. احد هذه الطرق ذكر عناصر المجموعة واحداً واحداً او بذكر عناصر المجموعة بطريقة توضح استنتاج باقي العناصر وعادة نضع عناصر المجموعة بين قوسين { ... } ونستعمل الفاصلة بين كل عنصر والذي يليه.

مثال (3)

اذا كانت A هي مجموعة الاعداد الطبيعية المحصورة بين 9,3 فيمكن كتابتها بالشكل التالي

$$A = \{4, 5, 6, 7, 8\}$$

او

$$A = \{4, 5, \dots, 8\}$$

مثال (4)

اذا كانت B هي مجموعة الاعداد الفردية الموجبة فيمكن كتابتها بالشكل التالي

$$B = \{1, 3, 5, \dots\}$$

طريقة اخرى للتعبير عن عناصر المجموعة هي الوصف وفقاً لقاعدة معينة او اكثر على النحو التالي (الصفة المميزة للمجموعة|×)
وتقرأ جميع العناصر × حيث × لها الصفة المميزة للمجموعة .

مثال (5)

اذا كانت A مجموعة الاعداد الطبيعية المحصورة بين 9,3 فتكتب كما يلي

$$A = \{ X \mid 3 < x < 9 \}$$

مثال (6)

اذا كانت B مجموع الاعداد الفردية الموجبة يمكن ان تكتب كما يلي

B = { x | x عدد فردي صحيح موجب }

تعريف :

يقال للمجموعة التي تتكون من عنصر واحد فقط مجموعة إحادية .

تعريف :

تعرف المجموعة الخالية بأنها تلك المجموعة التي تكون خالية من العناصر اي التي لاتحتوي على اي عنصر ويرمز لها عادة بالرمز φ او { } .

مثال (7)

ومن الامثلة على المجموعة الخالية هي

أ . مجموعة الاعداد الصحيحة الواقعة بين السبعة والثمانية .

ب . مجموعة العمال الذين تزيد اعمارهم على 200 سنة .

جـ . مجموعة المدن العربية التي تبلغ عدد نفوسها عام 1980 عشرون مليوناً .

تعريف : المجموعة الجزئية

اذا انتمى كل عنصر من عناصر المجموعة A الى المجموعة B فعندئذ نقول ان المجموعة A مجموعة جزئية من B والمجموعة B تحتوي المجموعة A وتعبر عن ذلك رياضياً على النحو التالي :

$$A \subseteq B$$

وتقرأ بأن المجموعة A مجموعة جزئية من المجموعة B أو المجموعة A محتواه في المجموعة B او B تحتوي على A .

مثال (8)

اذا كان $A = \{ x |$ عدد فردي $x \}$ و $B = \{ x |$ عدد صحيح $x \}$

فان $A \subseteq B$.

مثال (9)

لتكن لدينا المجموعة $S = \{ 1, 3, 5, 8, 10 \}$ فان المجموعة $A = \{ 5, 8, 10 \}$ جميع عناصرها منتقاة من S . وكذلك من الممكن ايجاد مجموعات اخرى عناصرها متكونة من عناصر S مثلاً $B = \{ 3 \}$ و $C = \{ 3, 5, 8, 10 \}$ وعليه فان المجموعات A , B و C مجموعات جزئية من S .

اما في حالة وجود بعض عناصر المجموعة A ليست عناصر في المجموعة B فان المجموعة A ليست مجموعة جزئية من المجموعة B ويمكن التعبير عن ذلك رياضياً على النحو التالي

$$A \not\subseteq B$$

مثال (10)

اذا كان $A = \{ a,b,c,2,6 \}$ و $B = \{ a,b,2,4,6 \}$ فان $A \not\subseteq B$ لأن $c \in A$

ولكن $c \notin B$ كما ان $4 \in B$ ولكن $4 \notin A$

• من الضروري التمييز بين دور كل من $\in$ و $\subseteq$ حيث ان الاولى تستعمل للتعبير بأن عنصراً ما ينتمي الى مجموعة معينة . بينما الثاني يستعمل للتعبير بأن مجموعة ما هي مجموعة جزئية من مجموعة معينة

مثال (11)

إذا كان $A = \{ 1,2,3,4 \}$ فمن الممكن كتابة $2 \in A$ لأن 2 عنصر ينتمي الى المجموعة A بينما $2 \not\subset A$ لأن 2 ليست مجموعة لذلك لا يمكن أن تكون مجموعة جزئية . كذلك يمكن كتابة $\{2\} \subset A$ لان المجموعة $\{2\}$ مجموعة جزئية من المجموعة A ولا يجوز كتابتها $\{2\} \in A$ لان عناصر المجموعة A هي اعداد وليست مجموعات .

مثال (12)

لتكن لدينا المجموعة $A = \{a,b,c,1,2,5,e,f\}$. هل العبارات التالية صحيحة ام خاطئة ؟

أ . $4 \in A$ ب . $4 \notin A$ جـ . $a \subseteq A$ د . $g \notin A$ هـ . $A \in \{a\}$ العبارات أ و هـ خاطئة بينما ب ، جـ ، د عبارات صحيحة .

تعريف : المجموعة المتساوية

اذا كان كل عنصر من عناصر مجموعة A هو عنصر من عناصر مجموعة B وكل عنصر من عناصر مجموعة B هو عنصر من عناصر مجموعة A . فان المجموعتين B , A متساويتان وتكتب بالشكل التالي . $A = B$

وتعني $A = B$ اذا وفقط اذا $B \subseteq A , A \subseteq B$

اما اذا كانت المجموعة A لاتساوي المجموعة B اي اذا لم يمكن لهما بالضبط العناصر نفسها فتكتب بالشكل التالي . $A \neq B$

وتعني $A \neq B$ اذا وفقط اذا $B \nsubseteq A$ او $A \nsubseteq B$

مثال (13)

اذا كانت المجموعة $A = \{1 ,3 ,5 ,7,\}$ والمجموعة $B = \{5 ,3 ,1 ,7 ,1 ,5\}$ فان المجموعتين A و B مجموعتين متساويتين . لان ترتيب العناصر او تكرارها لايؤثر على طبيعة المجموعة .

مثال (14)

لتكن لدينا المجموعة A كما يلي $A = \{1 ,2 ,3 ,4\}$

والمجموعة B كما يلي { x عدد صحيح موجب $B = \{x | x^2 < 25,$ وعليه فان $A = B$

تعريف

يقال للمجموعة انها منتهية اذا كانت تحتوي على عدد محدود من العناصر اما اذا كانت المجموعة ليست لها نهاية فانها مجموعة غير منتهية .

مثال (15)

كامثلة على المجموعات المنتهية وغير المنتهية تذكر مايلي ،

١. مجموعة الاعداد الطبيعية $N = \{1 , 2 , 3 , \ldots\}$ تعتبر مجموعة غير منتهية .

٢. مجموعة الاعداد الزوجية المحصورة بين 5 و 57 تعتبر مجموعة منتهية لان عدد عناصرها محدود

$\{6 , 8 , \ldots , 56\}$

٣. مجموعة ايام الاسبوع (السبت ، الاحد ، الاثنين ، الثلاثاء ، الاربعاء ، الخميس ، الجمعة) تعتبر مجموعة منتهية .

٤. مجموعة عواصم الدول العربية مجموعة منتهية .

٥. مجموعة جميع المستقيمات التي تمر بنقطة معينة في المستوى مجموعة غير منتهية .

٦. مجموعة السكان حاملي الجنسية العراقية تعتبر مجموعة منتهية على الرغم من صعوبة تحديد العدد بدقة وانما يتم كل عشر سنوات عن طريق التعداد العام للسكان .

من الجدير بالاشارة الى ان هناك كثير من المجموعات الشائعة الاستعمال في فروع الرياضيات سنتطرق اليها من قريب او بعيد في الفصول القادمة من هذا الكتاب منها .

١. مجموعة الاعداد الطبيعية $N = \{1 , 2 , 3 , \ldots\}$ وهي تلك الاعداد التي تستعمل للعد وذلك ابتداء من العدد واحد .

٢. مجموعة الاعداد الصحيحة $Y = \{\ldots , -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , \ldots\}$ وهي تلك الاعداد التي تتكون من أعداد الترقيم والاعداد السالبة .

٣. مجموعة الاعداد النسبية (b , a اعداد صحيحة $Q = \left\{ \frac{a}{b} \,\middle|\, b \neq 0 \right.$

٤. مجموعة الاعداد غير النسبية والتي يمكن التعبير عنها بشكل كسر عشري يحتوي على مالا نهاية من الاعداد التي لاتتكرر مثل $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3}$ ، π. حيث ان مثل هذا العدد لايمكن التعبير عنه بشكل $\frac{a}{b}$ حيث b , a اعداد صحيحة و $b \neq 0$

٥. مجموعة الاعداد الحقيقية $\{a$ عدد حقيقي $\} = R = \{a|$

وهي المجموعة التي تتكون من اتحاد مجموعة الاعداد النسبية ومجموعة الاعداد غير النسبية .

٦. مجموعة الاعداد المركبة $\{b, a$ اعداد حقيقية $C = \{a + bi | i = \sqrt{-1}$

فاذا كان $c = a + bi$ عدداً مركباً فان الجزء a يسمى الجزء الحقيقي و bi يسمى الجزء الخيالي من c .

الفترة هي مجموعة جزئية من مجموعة الاعداد الحقيقية . ويمكن ان توصف باستخدام الرموز . لتكن b, a عددين حقيقين بحيث $a < b$ فان

أ. مجموعة الاعداد الحقيقية بين b, a (عدا b, a) والتي تكتب بالشكل التالي $(a, b) = \{X | a < x < b\}$

تسمى بالفترة المفتوحة من a الى b

ب. تسمى الفترة المفتوحة بالاضافة الى نقطتي نهايتها a و b بالفترة المغلقة وتكتب بالشكل التالي ، $[a, b] = \{X | a \leqslant x \leqslant b\}$

جـ. تسمى الفترة المفتوحة بالاضافة الى النقطة a بالفترة نصف ـ مفتوحة من اليمين وتكتب بالشكل التالي $[a, b) = \{X | a \leqslant x < b\}$

د. تسمى الفترة المفتوحة بالاضافة الى النقطة b بالفترة نصف ـ مفتوحة من اليسار وتكتب بالشكل التالي $(a, b] = \{X | a < x \leqslant b\}$

ومن الممكن تعريف مجموعات جزئية اخرى من مجموعة الاعداد الحقيقية وهي الفترات غير المحددة ويمكن ان توصف كما يلي ،

$$(a, \infty) = \{X | x > a\}$$

$$[a, \infty) = \{X | x \geqslant a\}$$

$$(-\infty, a) = \{X | x < a\}$$

$$(-\infty, a] = \{X | x \leqslant a\}$$