محاضرات رياضيات الاعمال 2

المرحلة الاولى

قسم إدارة الاعمال

م. د. ايناس رضا علي

٢.١ عمليات جبرية على المجموعات .

تعريف : اتحاد مجموعتين Union Of Sets

اذا كان لدينا المجموعتين A و B فان اتحاد المجموعتين B, A يكون المجموعة الثالثة التي تحتوي على جميع العناصر التي تنتمي الى A او B او كلاهما . وترمز لذلك $A \cup B$. وتقرأ A أتحاد B
ويمكن كتابة المجموعة $A \cup B$ بالشكل التالي

$$A \cup B = \{ X \mid X \in A \text{ أو } X \in B \}$$

مثال (١)

اذا كانت $A = \{1,2\}$, $B = \{5,6,2\}$ فأن

$$A \cup B = \{1, 2, 5, 6\}$$

مثال (٢)

لتكن لدينا المجموعتين $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{b, d, e, g\}$ فان

$$A \cup B = \{a, b, c, d, e, g\}$$

تعريف : تقاطع مجموعتين Intersection of sets

اذا كان لدينا المجموعتين A و B فان تقاطع المجموعتين B , A يكون المجموعة الثالثة التي تحتوي على جميع العناصر التي تنتمي الى B , A ويرمز لها بالرمز $A \cap B$ وتقرأ A تقاطع B .
ويمكن كتابة المجموعة $A \cap B$ بالشكل التالي .

$$A \cap B = \{ X \mid x \in A , x \in B \}$$

مثال (٣)

اذا كانت $A = \{1,2\}$, $B = \{5,6,2\}$ فان $A \cap B = \{2\}$

مثال (4)

اذا كانت $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{b, d, e, g\}$ فان

$$A \cap B = \{b, e, d\}$$

تعريف : الفرق بين مجموعتين

اذا كان لدينا المجموعتين B,A فان فرق B عن A أو فضله B على A يكون المجموعة الثالثة التي تحتوي على جميع العناصر التي تنتمي الى المجموعة B ولا تنتمي الى المجموعة A وترمز لذلك B\A وتقرأ فضله B على A أو B – A وتقرأ B ناقص A

ويمكن كتابة المجموعة B – A بالشكل التالي

$$B - A = \{ X \mid x \in B , x \notin A \}$$

مثال (5)

اذا كان $B = \{5,6,2\} , A = \{1,2\}$ فأن

$$B \setminus A = \{5,6\}$$

$$A \setminus B = \{1\}$$

مثال (٦)

اذا كان $B = \{b,d,e,g\} , A = \{a,b,c,d,e\}$ فأن

$$B \setminus A = \{g\}$$

$$A \setminus B = \{a,c\}$$

تعريف : المجموعة الشاملة

في اية دراسة علمية يجب ان يكون هناك مجموعة معينة بحيث تكون جميع المجموعات المختلفة التي تدور حولها الدراسة مجموعات جزئية لها . او بعبارة اخرى تشترك عناصر هذه المجموعات معاً في طبيعة واحدة والتي تنتمي جميعها الى هذه المجموعة . حيث تدعى بالمجموعة الشاملة او الكلية ويرمز لها بالرمز S

تعريف : المتممة لمجموعة

اذا كانت المجموعة A مجموعة جزئية من المجموعة الشاملة S . فالمجموعة المكونة من عناصر S والتي لاتنتمي الى A تسمى متممة المجموعة A بالنسبة الى S ويرمز لها بالرمز A^c

ويمكن كتابة المجموعة A^c بالشكل التالي

$$A^c = \{ X \mid x \in S, x \notin A \}$$

مثال (7)

اذا كانت

$$S = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \}$$

$$A = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$$

فإن

$$A^c = \{ 0, 2, 4, 6, 8 \}$$

تعريف

يقال للمجموعتين B, A مجموعتان منفصلتان اذا كانت مجموعة تقاطع المجموعتين B, A مجموعة خالية أي $A \cap B = \varphi$

مثال (8)

اذا كان

$$B = \{ 1, 3, 5 \}, A = \{ 2, 4, 6 \}$$

فإن

$$A \cap B = \varphi$$

مثال (9)

لتكن لدينا المجموعات التالية

$$S = \{ 1, 2, 3, \ldots, 9 \}$$

$$A = \{ 1, 3, 5 \}, B = \{ 3, 4, 5, 6 \}, C = \{ 6, 7 \}$$

فإن

$$A \cap C = \varphi$$

$$A \cup B = \{ 1, 3, 4, 5, 6 \}$$

$$A \cap B = \{ 3, 5 \}$$

$$B^c = \{ 1, 2, 7, 8, 9 \}$$

$$B \setminus C = \{3, 4, 5\}$$

$$A \cap B \cap C = \varphi$$

$$A \cup B \cup C = \{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

جبر المجموعات

نستعرض ادناه بعض الخواص والقوانين المهمة للمجموعات دون الدخول الى براهينها .

١. لتكن A مجموعة فان

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

٢. لتكن A , B مجموعتين فان

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

٣. لتكن A , B و C ثلاث مجموعات فإن

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

٤. لتكن A , B و C ثلاث مجموعات فإن

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

٥. لتكن A مجموعة جزئية من المجموعة الشاملة S فان

$$A \cup S = S \qquad A \cup \varphi = A$$

$$A \cap S = A \qquad A \cap \varphi = \varphi$$

$A \cap A^c = \varphi$ $(A^c)^c = A$

$A \cup A^c = S$ $\varphi^c = S$

$S^c = \varphi$

٦. لتكن A و B مجموعتين فان

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

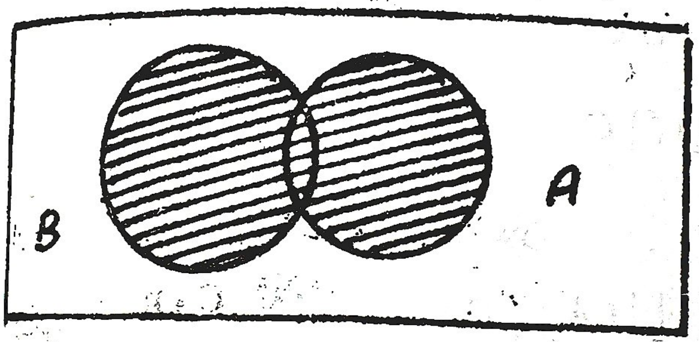
٢.١ مخططات فين

تستعمل مخططات فين لتمثيل المجموعة هندسيا على انها نقاط في مستو محاط بخط مغلق ، بحيث ان كل عنصر ينتمي للمجموعة يمثل نقطة داخل المنطقة التي يحصرها الخط المغلق ، وان كل عنصر لاينتمي الى المجموعة يمثل بنقطة خارج المخطط

وتعتبر مخططات فين كوسائل مساعدة لتوضيح بعض القضايا والعمليات التي تخص المجموعات ولا يمكن اعتبارها باي حال كبرهان رياضي .

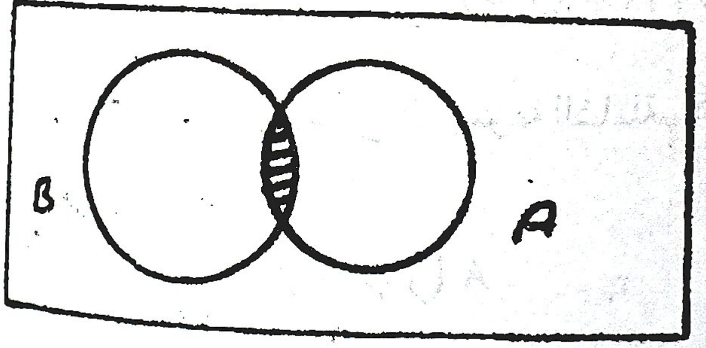
ولتوضيح مخططات فين نعطي الامثلة التالية :

١. $A \cup B$



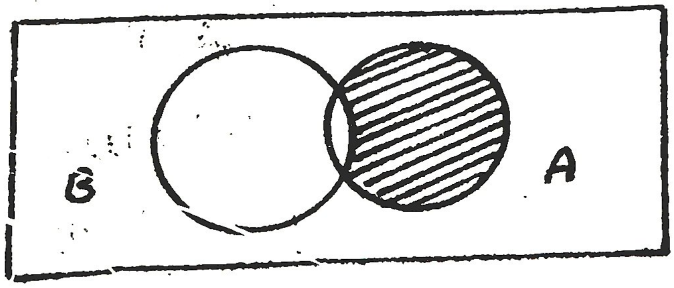
تمثل المنطقة المخططة اتحاد المجموعتين

٢. $A \cap B$



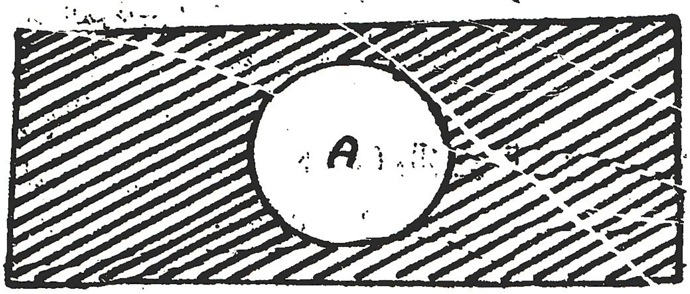
تمثل المنطقة المخططة تقاطع المجموعتين

٣. $A \setminus B = A - B$



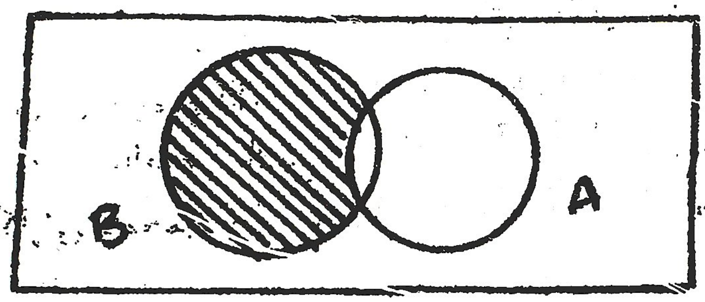
تمثل المنطقة المخططة فضلة A على B

٤. A^c



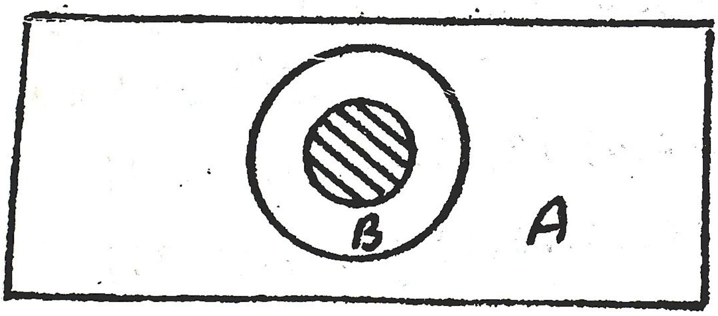
تمثل المنطقة المخططة متممة A

٥. $B \setminus A = B - A$



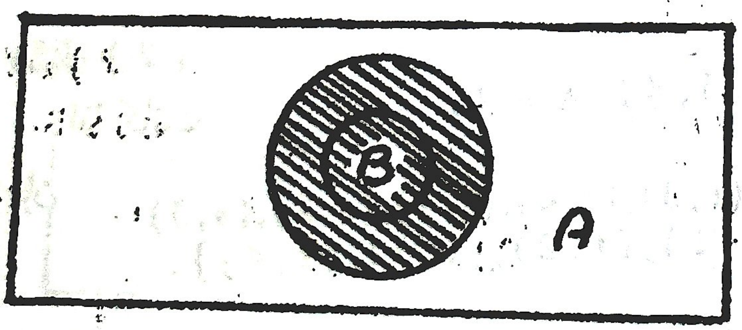
تمثل المنطقة المخططة فضلة B على A

٦. $A \cap B = B$



المنطقة المخططة تمثل تقاطع المجموعتين A و B وهي ايضاً مجموعة جزئية للمجوعة A

٧. $A \cup B = A$



المنطقة المخططة تمثل اتحاد المجوعتين

١-٨ الازواج المرتبة

تعريف : الازواج المرتبة

كائن مؤلف من عنصرين a و b مقترنين بالترتيب من اليسار a ثم b ويكتب بالشكل التالي (a , b) حيث ان

١. الزوج المرتب (a , b) لايشابه المجموعة $\{a , b\}$

٢. يطلق على a بالعنصر أو المركبة الاولى وعلى b بالعنصر أو المركبة الثانية للزوج المرتب.

٣. يقال للزوج المرتب (a , b) والزوج المرتب (c , d) انهما متساويان اذا وفقط اذا كان $a = c$ ، $b = d$.

حاصل الضرب الديكارتي :

حاصل الضرب الديكارتي للمجموعة A مع المجموعة B هي المجموعة التي تحتوي على جميع الازواج المرتبة التي ينتمي العنصر الاول منها الى المجموعة A، $a \in A$ ، والعنصر الثاني الى المجموعة B، $b \in B$. ويرمز لحاصل الضرب الديكارتي للمجموعة A مع المجموعة B بالرمز $A \times B$

مثال (١)

افرض ان $A = \{1 , 2 , 3\}$ ، $B = \{4 , 5\}$ فان حاصل الضرب الديكارتي $A \times B$ و $B \times A$ هي كالآتي :

$$A \times B = \{(1 , 4) , (1 , 5) , (2 , 4) , (2 , 5) , (3 , 4) , (3 , 5)\}$$

$$B \times A = \{(4 , 1) , (4 , 2) , (4 , 3) , (5 , 1) , (5 , 2) , (5 , 3)\}$$

ومن هذا المثال نستنتج بان $A \times B \neq B \times A$

مثال (2)

اذا كانت $A = \{r , s , t\}$ ، $B = \{1 , 2 , 3 , 4\}$

فان

$$A \times B = \{(r , 1) , (r , 2) , (r , 3) , (r , 4) , (s , 1) , (s , 2) , (s , 3) , (s , 4) , (t , 1) , (t , 2) , (t , 3) , (t , 4)\} .$$

مثال (3)

لنفرض لدينا قائمة باسعار بعض انواع الخضر والفواكه كالاتي .

عنب 500 فلس ، خوخ 1500 فلس ، خيار 900 فلس ، باذنجان 600 فلس ، فانه يمكن ان تكتب هذه القائمة كمجموعة من ازواج مرتبة حيث تكون المركبة الاولى لكل منها هو سعر الخضر أو الفاكهة والمركبة الثانية نوعها أي أن

{ (باذنجان , 600) و (خيار , 900) و (خوخ , 1500) و (عنب , 500) }

حساب عدد العناصر في المجموعات

نستعرض بعض القواعد المهمة المستخدمة في حساب عدد العناصر في المجموعات المنتهية دون الدخول الى براهينها .

١. اذا كانت A مجموعة منتهية فنرمز لعدد العناصر المكونة لهذه المجموعة بالرمز $n(A)$.

٢. اذا كانت B , A مجموعتين منتهيتين ومن خلال ملاحظة مخططات فين فيمكن كتابة العلاقة التالية .

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

٣. اذا افترضنا بان المجموعتين B , A منفصلتان فمن البساطة ملاحظة العلاقة التالية

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

٤. اما في حالة ان المجموعتين B , A ليست منفصلتان أي ان $A \cap B \neq \varphi$ فإن $A \cup B = A \cup (B - A)$ حيث أن $A \cap (B - A) = \varphi$ لذلك .

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B - A)$$

$$= n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

ومن الممكن تعميم هذه العلاقة كما يلي :

٥. لو افترضنا وجود ثلاث مجموعات منتهية C ، B ، A فإن

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) -$$

$$n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

من تعريف المجموعة الخالية تحصل على ان $n(\varphi) = 0$

٦. اذا كان لدينا m من العناصر في المجموعة A و p من العناصر في المجموعة B

٧. فإن عدد العناصر في مجموعة حاصل الضرب الديكارتي $A \times B$ هي m.p

$$n(A \times B) = n(A) . n(B)$$

يعني

ومن الممكن تعميم هذه العلاقة كما يلي

٨. حاصل الضرب الديكارتي لثلاث مجموعات أو أكثر بحسب الصيغ التالية

$$n(A \times B \times C) = n(A) . n(B) . n(C)$$

وبصورة عامة

$$n(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_m) = n(A_1) . n(A_2) \dots n(A_m)$$

مثال (4)

اذا كانت $C = \{3, 9\}, B = \varphi, A = \{a, e, g, f\}$

فإن $n(C) = 2 ، n(B) = 0 ، n(A) = 4$

كذلك $A \bigcup B = \{a, e, g, f\}$

$$A \bigcup C = \{a, e, g, f, 3, 9\}$$

$$A \bigcap B = \varphi$$

$$A \bigcap C = \varphi$$

وعليه فإن $n(A \bigcup B) = n(A) + n(B) - n(A \bigcap B)$

$$= 4 + 0 - 0 = 4$$

$$n(A \bigcup C) = n(A) + n(C) - n(A \bigcap C)$$

$$= 4 + 2 - 0 = 6$$

$$n(A \backslash B) = n(A) - n(A \bigcap B)$$

$$= 4 - 0 = 4$$