Ministry of Higher Education and Scientific Research

Al-Mustaqbal University College

Department of Chemical Engineering and petroleum Industrials

Mathematics II

2^{nd} Stage

Lecturer: Sara I. Mohammed

2022-2023

2. Gamma function:

تعرف دالة جاما كالآتي:

$$\Gamma(n)=\int_0^\infty e^{-t}\, t^{n-1}\, dt \qquad (n>0) \qquad (1)$$

ونلاحظ أن الدالة $e^{-t}t^{n-1}$ عند ∞ تؤول إلى الصفر لأي قيمة عددية لـ n وعليه لاتكون هناك صعوبات علمية عند $t\to\infty$ بينما في الجزء السفلي توجد $t\to 0$ نجد أن $e^{-t}\cong 1$ وعليه تصبح المعادلة (1) على الصورة

$$\Gamma(n)=\int_0^c t^{n-1}dt+\int_c^\infty e^{-t}t^{n-1}dt=\left[\frac{1}{n}t^n\right]_0^c+\int_c^\infty e^{-t}t^{n-1}dt$$

وعليه إذا كان الجزء الأول من الناتج عدد فيجب علينا اختيار $n>0$ حتى لا ينعدم المقام .

بعض النظريات والخواص الهامة

نظرية ١:

$$\Gamma(1)=1$$

البرهان :

من تعريف $\Gamma(n)$ نضع $n=1$ فنحصل على

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-t}dt=\left[-e^{-t}\right]_0^\infty$$

$$\Gamma(1)=1 \qquad (3)$$

نظرية ٢:

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)$$

البرهان :

في المعادلة (1) بتحريك كل $n\to n+1$ نحصل على

$$\Gamma(n+1)=\int_0^\infty e^{-t}\; t^n\; dt$$

بالتكامل بالتجزيء بأخذ $u=t^n$, $e^{-t}dt=dv$, نحصل على

$$\Gamma(n+1)=\left[-e^{-t}t^n\right]_0^\infty-\int_0^\infty(-e^{-t})\; n\; t^{n-1}dt$$

كما نلاحظ انعدام الجزء الأول من النتيجة السابقة فنحصل على

$$\Gamma(n+1)=n\int_0^\infty e^{-t}\; t^{n-1}\; dt$$

$$\Gamma(n+1)=n\;\Gamma(n) \qquad (4)$$

ملاحظات :

١) العلاقة $\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n)$ تسمى بالصيغة التكرارية لدالة جاما .

٢) يمكن تعميم دالة جاما لقيم $n<0$ (للأعداد الحقيقية غير الصحيحة) باستخدام الصيغة السابقة على الصورة :

$$\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n}$$

نظرية ٣:

لأي عدد صحيح موجب

$$\Gamma(n+1) = n!$$

البرهان:

من خلال النظرية (٢) و (4) مع تكرار تحريك n بالمقادير $n-1, n-2, n-3$ وهكذا نجد أن

$$\begin{aligned}\Gamma(n+1) &= n(n-1)\Gamma(n-1)\\ &= n(n-1)(n-2)\Gamma(n-2)\\ &= n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 2\cdot 1\,\Gamma(1)\end{aligned}$$

وباستخدام (3) نحصل على العلاقة

$$\Gamma(n+1) = n! \qquad (5)$$

نتيجة ١:

إذا كان $n=0$ فإن

$$0! = \Gamma(0+1) = \Gamma(1) = 1$$

نظرية ٤:

$$\Gamma(n) = 2\int_0^\infty e^{-t^2}\, t^{2n-1}\, dt$$

البرهان:

باستخدام التعويض $t = u^2$

و منه نجد أن $dt = 2u\,du$

و على ذلك فإن

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-u^2} (u^2)^{n-1} (2u\,du)$$

وبالتالي نحصل على

$$\Gamma(n) = 2\int_0^\infty e^{-u^2} u^{2n-1}\, du \qquad (6)$$

وهذه النظرية مفيدة في العمليات الإحصائية المستخدم فيها ما يسمى بدالة الكثافة وغيرها. مثال على ذلك عند وضع $n=\frac{1}{2}$ نجد أن

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = 2\int_0^{\infty} e^{-u^2}\,du \qquad (7)$$

نظرية ٥:

يمكن الربط بين الدوال المثلثية ودالة جاما كالآتي:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-1}\theta \cdot \sin^{2m-1}\theta\, d\theta = \frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{2\Gamma(n+m)}.$$

ولكن من نظرية (٤)

$$\Gamma(n+m) = 2\int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{2(n+m)-1}\,dr$$

وعليه نجد أن

$$\Gamma(n)\Gamma(m) = 2\Gamma(n+m)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-1}\theta \sin^{2m-1}\theta\, d\theta$$

وعليه نجد أن

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-1}\theta \sin^{2m-1}\theta\, d\theta = \frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{2\Gamma(n+m)} \qquad (8)$$

امثلـــــــــــــــة محلولة

مثال ١:

احسب

$$\text{(i)}\ \frac{\Gamma(6)}{2\Gamma(3)} \qquad \text{(ii)}\ \frac{\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} \qquad \text{(iii)}\ \frac{\Gamma(3)\Gamma(2.5)}{\Gamma(5.5)} \qquad \text{(iv)}\ \frac{6\Gamma(\frac{8}{3})}{5\Gamma(\frac{2}{3})}$$

الحل:

$$\text{(i)}\ \frac{\Gamma(6)}{2\Gamma(3)} = \frac{5!}{2\cdot 2!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2!}{2\cdot 2!} = 30$$

$$\text{(ii)}\ \frac{\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{\Gamma(\frac{3}{2}+1)}{\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{\frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{\frac{3}{2}\Gamma(\frac{1}{2}+1)}{\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{3}{4}$$

بالمثل

$$\text{(iii)}\quad \frac{\Gamma(3)\Gamma(2.5)}{\Gamma(5.5)}=\frac{2!(1.5)(0.5)\Gamma(0.5)}{(4.5)(3.5)(2.5)(1.5)(0.5)\Gamma(0.5)}=\frac{2!}{(\frac{9}{2})(\frac{7}{2})(\frac{5}{2})}=\frac{16}{315}.$$

$$\text{(iv)}\quad \frac{6\Gamma(\frac{8}{3})}{5\Gamma(\frac{2}{3})}=\frac{6\cdot(\frac{5}{3})(\frac{2}{3})\Gamma(\frac{2}{3})}{5\Gamma(\frac{2}{3})}=\frac{4}{3}.$$

نظرية ٦:

$$\Gamma(n)\Gamma(1-n)=\frac{\pi}{\sin \pi n}$$

نتيجة :

عندما $n=\frac{1}{2}$ فإن :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}=\pi$$

و بالتالي فإن

$$\Gamma(\tfrac{1}{2})=\sqrt{\pi}$$

وهي نفس النتيجة التي حصلنا عليها سابقا

مثال٢ :

أوجد قيمة

(i) $\Gamma(\frac{-1}{2})$ (ii) $\Gamma(\frac{-5}{2})$

الحل :

$$\because\ \Gamma(n)=\frac{\Gamma(n+1)}{n}$$

بوضع $n=\frac{-1}{2}$

$$(i)\quad \Gamma(\tfrac{-1}{2})=\frac{\Gamma(\frac{-1}{2}+1)}{\frac{-1}{2}}=-2\Gamma(\tfrac{1}{2})=-2\sqrt{\pi}$$

أيضا بوضع $n=\frac{-5}{2}$

$$\text{(ii)}\quad \Gamma(\tfrac{-5}{2})=\frac{\Gamma(\frac{-3}{2})}{(\frac{-5}{2})}$$

$$\therefore\ \Gamma(\tfrac{-3}{2})=\frac{\Gamma(\frac{-1}{2})}{(\frac{-3}{2})} \qquad ,\Gamma(\tfrac{-1}{2})=-2\sqrt{\pi}$$

وعليه نجد أن

$$\Gamma(\tfrac{-5}{2})=(\tfrac{-2}{5})(\tfrac{-2}{3})(-2\sqrt{\pi})=\frac{8}{15}\sqrt{\pi}$$

مثال٣:

احسب التكاملات الآتية:

$$\text{(i)}\ \int_0^\infty x^3 e^{-x}dx \qquad \text{(ii)}\ \int_0^\infty x^6 e^{-2x}dx \qquad \text{(iii)}\ \int_0^\infty \sqrt{y}e^{-y^3}dy$$

الحل:

$$\text{(i)}\ \int_0^\infty x^3 e^{-x}dx = \int_0^\infty x^{4-1} e^{-x}dx = \Gamma(4) = 3!$$

$$\text{(ii)}\ \int_0^\infty x^6 e^{-2x}dx,$$

نأخذ الفرض $u = 2x$, $du = 2\,dx$ و على فإن

$$\int_0^\infty x^6 e^{-2x}dx = \int_0^\infty (\frac{u}{2})^6 e^{-u}\frac{du}{2} = \frac{1}{(2)^7}\int_0^\infty u^6 e^{-u}du = \frac{6!}{2^7} = \frac{45}{8}.$$

$$\text{(iii)}\ \int_0^\infty ye^{-y^3}dy\,,$$

بوضع $y^3 = u$, $3y^2dy = du$, ونلاحظ أن حدود التكامل تبقى كما هي

$$\int_0^\infty ye^{-y^3}dy = \int_0^\infty u^{\frac{1}{3}}e^{-u}\cdot\frac{1}{3}u^{\frac{-2}{3}}du = \frac{1}{3}\int_0^\infty u^{-\frac{1}{2}}e^{-u}du = \frac{1}{3}\int_0^\infty u^{\frac{1}{2}-1}e^{-u}du = \frac{\pi}{3}$$