Ministry of Higher Education and Scientific Research

Al-Mustaqbal University College

Department of Chemical Engineering and petroleum Industrials

Mathematics II

2^{nd} Stage

Lecturer: Sara I. Mohammed

2022-2023

3. *Beta* function:

تعرف دالة بيتا كالآتي:

$$\beta(n,m)=\int_0^1 t^{n-1}(1-t)^{m-1}\,dt \qquad (n>0,\ m>0) \qquad (10)$$

وواضح عند $t \to 0$ لابد من وجود قيود على t بينما عند $t=1$ لا توجد أي قيود عليها وعليه يتضح من المعادلتين $(1),\ (10)$ أن القيود المفروضة عند نقطة الأصل على دالتي $\beta(n,m), \Gamma(n)$ قد تحكمت في تحديد ماهية n,m.

العلاقة بين دالتي بيتا وجاما :

نظرية ٦:

هذه النظرية تربط بين دالتي بيتا وجاما اعتمادا على إثبات نظرية (٥) كالآتي:

$$\beta(n,m)=\frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(n+m)} \qquad (11)$$

امثـــــــــــــلة محلولة

احسب التكاملات الآتية:

$$\text{(i)} \quad \int_0^1 x^4(1-x)^3\,dx$$

الحل:

نلاحظ أن هذه التكاملات يمكن حلها بدالة بيتا كالآتي:

$$\text{(i)} \quad \int_0^1 x^4(1-x)^3\,dx = \int_0^1 x^{5-1}(1-x)^{4-1}\,dx = \beta(5,4) = \frac{\Gamma(5)\Gamma(4)}{\Gamma(9)} = \frac{4!\;3!}{8!} = \frac{1}{280}.$$

$$\text{(iii)} \quad \int_0^a y^4(a^2-y^2)^{\frac{1}{2}}\,dy$$

بوضع $y^2 = a^2x$ وعليه $y = ax^{\frac{1}{2}}$

$$\int_0^a y^4(a^2-y^2)^{\frac{1}{2}}\,dy = \int_0^1 (ax^{\frac{1}{2}})^4 a(1-x)^{\frac{1}{2}} a\,\frac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{a^6}{2}\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}\cdot(1-x)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \frac{a^6}{2}\,\beta\left(\tfrac{5}{2},\tfrac{3}{2}\right) = \frac{a^6}{2}\,\frac{\Gamma(\frac{5}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(4)} = \frac{a^6}{2}\cdot\frac{(\frac{3}{2})(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})\pi}{3!} = \frac{\pi a^6}{32}.$$

ملاحظة مهمه: ممكن استخدام المعادلة التالية التي تحتوي على دالة ال(sin & cos)

$$\beta(n,m) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-1}\theta \quad \sin^{2m-1}\theta \quad d\theta = \frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(n+m)} \qquad (n>0,\ m>0)$$

احسب التكاملات الآتية:

$$\text{(i)} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6\theta \quad d\theta \qquad\qquad \text{(ii)} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\theta\cos^5\theta\,d\theta$$

الحل:

لحساب هذه العلاقات من المفيد استخدام الآتي:

$$\beta(n,m) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1}\theta\cos^{2m-1}\theta\,d\theta$$

ولذلك

(i) $\int^{\frac{\pi}{2}} \sin^6\theta\, d\theta$

(ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\theta \cos^5\theta\, d\theta$

بوضع $n=\frac{5}{2}$ $,2n-1=4$ $2m-1=5$ $m=3$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\theta \cos^5\theta\, d\theta = 2\beta\left(\tfrac{5}{2},3\right) = 2\frac{\Gamma(\frac{5}{2})\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{11}{2})} = \frac{8}{315}$$