4.2 Non-Homogeneous Second Order Linear Differential Equation

The general form:

$$\acute{\acute{y}} + P(x)\acute{y} + Q(x)y = R(x)$$

if $R(x) \neq 0$ $\quad\therefore$ Non-Homogenous Equations

Theorem: if (Y) is solution to the Non-homogenous equation, then $y_c = c_1\, y_1 + c_2\, y_2$ is general solution for Homogenous Equations, then the complete solution for Non-Homogenous Equations is: $\boldsymbol{y = c_1\, y_1 + c_2\, y_2 + \mathrm{Y}}$

where:

$(c_1\, y_1 + c_2\, y_2)$ is complementary function.

(Y) is particular integration.

النظرية: اذا (Y) حل للمعادلة الغير متجانسة، و ال$(y_c = c_1\, y_1 + c_2\, y_2)$ هو الحل العام للمعادلة المتجانسة، اذن الحل التام للمعادلة الغير متجانسة هو:

$$\boldsymbol{y = c_1\, y_1 + c_2\, y_2 + \mathrm{Y}}$$

Particular Integration (Y):

1. **Method of Undetermined Coefficients**
2. **Method of Variation of Parameters**

الطريقة الأولى تستخدم عندما تكون الدالة في الطرف الأيمن من المعادلة التفاضلية $R(x)$ تمتلك عدد محدد من المشتقات المستقلة خطيا.

الطريقة الثانية تستخدم عندما تكون الدالة في الطرف الأيمن من المعادلة التفاضلية $R(x)$ تمتلك عدد محدد او غير محدد من المشتقات المستقلة خطيا.

For Example:

محددة: تحل بالطريقة الأولى و الثانية			غير محددة: تحل بالطريقة الثانية فقط
$y = \sin x$ $y' = \cos x$ $y'' = -\sin x$ $y''' = -\cos x$	$y = e^{2x}$ $y' = 2e^{2x}$ $y'' = 4e^{2x}$ $y''' = 8e^{2x}$	$y = x^2$ $y' = 2x$ $y'' = 2$ $y''' = 0$	$y = \ln x$ $y' = \frac{1}{x}$ $y'' = -\frac{1}{x^2}$ $y''' = \frac{2}{x^3}$
يمكن جمعها			

4.2.1 Method of Undetermined Coefficients:

ذكرنا سابقا ان هذه الطريقة تستخدم فقط عندما تكون الدالة في الطرف الأيمن من المعادلة التفاضلية $R(x)$ تمتلك عدد محدد من المشتقات المستقلة خطيا.

Example (1): Find the complete solution of the differential equation:

1) $\boldsymbol{y'' + 4\,y' + 3y = 5\,e^{2x}}$

2) $\boldsymbol{y'' + 4\,y' + 3y = 5\ \sin 2x}$

3) $\boldsymbol{y'' + 4\,y' + 3y = 5\,e^{-3x}}$

Solve:

1) $\boldsymbol{y'' + 4\,y' + 3y = 5\,e^{2x}}$

$$y'' + 4\,y' + 3y = 0$$

$$m^2 + 4\,m + 3 = 0$$

$$(m+1)(m+3) = 0$$

$$\therefore \begin{bmatrix} (m+1) = 0 \\ (m+3) = 0 \end{bmatrix} \rightarrow \quad m_1 = -1\,, \qquad m_2 = -3$$

$$y_c = c_1\,e^{m_1 x} + c_2\,e^{m_2 x}$$

$$y_c = c_1\,e^{-x} + c_2\,e^{-3\,x}$$

$$Let\ Y = A\,e^{2x},\quad Y' = 2A\,e^{2x}\,,\quad Y'' = 4A\,e^{2x}$$

$$4A\,e^{2x} + 8A\,e^{2x} + 3A\,e^{2x} = 5\,e^{2x}$$

$$15A\, e^{2x} = 5\, e^{2x} \quad \rightarrow \quad A = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore Y = \frac{1}{3}\, e^{2x}$$

$\therefore$ The complete solution: $\quad y = c_1\, e^{-x} + c_2\, e^{-3\,x} + \frac{1}{3}\, e^{2x}$

2) $\boldsymbol{\acute{\acute{y}} + 4\,\acute{y} + 3y = 5\ \sin 2x}$

$\acute{\acute{y}} + 4\,\acute{y} + 3y = 0$

The same above example

$$y_c = c_1\, e^{-x} + c_2\, e^{-3\,x}$$

$Let\ Y = A\ \sin 2x,\quad \acute{Y} = 2A\cos 2x\ ,\quad \acute{\acute{Y}} = -4A\ \sin 2x$

$$-4A\ \sin 2x + 8A\cos 2x + 3A\ \sin 2x = 5\ \sin 2x$$

$$-A\ \sin 2x + 8A\cos 2x = 5\ \sin 2x + 0\cos 2x$$

$$\left.\begin{array}{lll} -A = 5 & \rightarrow & A = -5 \\ 8A = 0 & \rightarrow & A = 0 \end{array}\right]$$

هذا لا يجوز لان قيمة A يجب ان تكون قيمة محددة والسبب هو تغيير الدالة عند الاشتقاق بين sin و cos.

لذلك الفرضية الصحيحة تكون كالاتي:

$Let\ Y = A\ \sin 2x + B\ \cos 2x$

$\acute{Y} = 2A\cos 2x - 2B\sin 2x$

$\acute{\acute{Y}} = -4A\ \sin 2x - 4\,B\cos 2x$

$$(-4A\sin 2x - 4B\cos 2x) + 4\,(2A\cos 2x - 2B\sin 2x) + 3(A\sin 2x + B\cos 2x) = 5\sin 2x$$

$$(-A - 8B)\sin 2x + (-B + 8A)\cos 2x = 5\sin 2x$$

$$\left.\begin{array}{l} -A - 8B = 5 \\ -B + 8A = 0 \end{array}\right] \quad \rightarrow \quad A = -\frac{1}{13},\quad B = -\frac{8}{13}$$

$$\therefore Y = -\frac{1}{13}\sin 2x - \frac{8}{13}\cos 2x$$

$\therefore$ The complete solution: $\quad y = c_1\, e^{-x} + c_2\, e^{-3\,x} - \frac{1}{13}\sin 2x - \frac{8}{13}\cos 2x$

3) $\boldsymbol{\acute{\acute{y}} + 4\,\acute{y} + 3y = 5\, e^{-3x}}$

$\acute{\acute{y}} + 4\,\acute{y} + 3y = 0$

The same above example

$y_c = c_1\, e^{-x} + c_2\, e^{-3\,x}$

$Let\ Y = A\ xe^{-3x}$

اذا كانت الدالة في الطرف الأيمن تشبه احد حلول المعادلة المتجانسة فيضرب ال$(\,Y)$ ب$(\,x^n)$ حيث n اصغر عدد صحيح موجب يزيل التكرار.

$\acute{Y} = -3A\ xe^{-3x} + A\ e^{-3x}\,,$

$\acute{\acute{Y}} = -3A\,(-3xe^{-3x} + e^{-3x}) - 3A\ e^{-3x} = \ 9A\ xe^{-3x} - 6A\ e^{-3x}$

$9A\ xe^{-3x} - 6A\ e^{-3x} + 4(-3A\ xe^{-3x} + A\ e^{-3x}) + 3A\ xe^{-3x} = 5\ e^{-3x}$

$-2A\ e^{-3x} = 5\ e^{-3x} \quad \rightarrow \qquad A = -\dfrac{5}{2}$

$\therefore Y = -\dfrac{5}{2}\ xe^{-3x}$

$\therefore$ The complete solution: $\quad y = c_1\ e^{-x} + c_2\ e^{-3\,x} - \dfrac{5}{2}\ xe^{-3x}$

Example (2): Find the complete solution of the differential equation:

$\boldsymbol{\acute{\acute{y}} + 9\ y = 2x^2 + 4x + 7}$

Solve:

$\acute{\acute{y}} + 9y = 0$

$m^2 + 9 = 0 \qquad \rightarrow \qquad m^2 = -9$

$\therefore m_{1,2} = \pm 3i = P \pm qi$

$\therefore y_c = e^{Px}(A\cos qx + B\sin qx) = e^{0x}(A\cos 3x + B\sin 3x)$

$\therefore y_c = A\cos 3x + B\sin 3x$

$Let\ Y = Cx^2 + Dx + E,$

$\acute{Y} = 2Cx + D\,,$

$\acute{\acute{Y}} = 2C$

$2C + 9(Cx^2 + Dx + E) = 2x^2 + 4x + 7$

$9Cx^2 + 9Dx + (2C + 9E) = 2x^2 + 4x + 7$

$9C = 2 \quad \rightarrow \quad C = \frac{2}{9}$

$9D = 4 \quad \rightarrow \quad D = \frac{4}{9}$

$(2C + 9E) = 7 \quad \rightarrow \quad E = \frac{7 - 2 \times \frac{2}{9}}{9} = \frac{59}{81}$

$\therefore Y = \frac{2}{9}x^2 + \frac{4}{9}x + \frac{59}{81}$

$\therefore$ The complete solution: $\quad y = A\cos 3x + B\sin 3x + \frac{2}{9}x^2 + \frac{4}{9}x + \frac{59}{81}$

H.W: Find the complete solution of the differential equation:

1) $\acute{\acute{y}} + 5\,\acute{y} + 6y = 3\,e^{-2x} + e^{3x}$

Ans: $y = c_1\,e^{-2x} + c_2\,e^{-3x} + 3x\,e^{-2x} + \frac{1}{30}e^{3x}$

2)$(D^2 + 4D + 4)y = \; xe^{-x}$

Ans: $y = c_1\,e^{-2x} + c_2\,x\,e^{-2x} + x\,e^{-x} - 2e^{-x}$

3) $\acute{\acute{y}} - \;\acute{y} - 2y = 4\,x^2$

Ans: $y = c_1\,e^{2x} + c_2\,e^{-x} - 2x^2 + 2x - 3$

4) $\acute{\acute{y}} = 9\,x^2 + 2x - 1$

Ans: $y = c_1 \; + c_2\,x + \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}$