4.3 Higher Order Linear Differential Equation

The general form:

$$\boldsymbol{a_o\, y^n + a_1\, y^{n-1} + a_2\, y^{n-2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{n-1}\acute{y} + a_n y = R(x)}$$

تحل هذه المعادلة بنفس أسلوب حل المعادلة من الرتبة الثانية، فحلها تتكون من جزئيين (حل معادلة المتجانسة(y_c)) و(حل معادلة الغير متجانسة (Y)).

لحل هذه المعادلة المتجانسة تستخدم أيضا المعادلة المميزة:

$$a_o\, m^n + a_1\, m^{n-1} + +a_2\, m^{n-2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{n-1}m + a_n m = 0$$

وعند حل المعادلة المميزة نحصل على (n) من الجذور وبذلك نحصل على (n) من الحلول.

$$y_c = c_1\, y_1 + c_2\, y_2 + c_3\, y_3 + \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. + c_n\, y_n$$

وعند ظهور جذور متشابهة، يثبت احد هذه الجذور وتضرب الأخرى ب(x^n) للتخلص من التشابه، حيث n أصغر عدد صحيح موجب يزيل التكرار.

Example (1): Find the complete solution of the differential equation:

$$\boldsymbol{y''' + 5y'' + 9\, y' + 5y = 3\, e^{2x}}$$

Solve:

$$y''' + 5y'' + 9\, y' + 5y = 0$$

$$m^3 + 5m^2 + 9\, m + 5 = 0$$

by try and error get to:

$let\ m = 1 \quad \rightarrow$

$1 + 5 + 9 + 5 = 20 \neq 0 \qquad \therefore not\ ok$

$let\ m = -1 \quad \rightarrow \quad -1 + 5 - 9 + 5 = 0 \qquad \therefore ok$

$m^2 + 4\,m + 5$

$\boxed{m+1}\ \ \boxed{m^3 + 5m^2 + 9\,m + 5}$

$m^3 + m^2$

$4m^2 + 9\,m$

$4m^2 + 4\,m$

$5\,m + 5$

$5\,m + 5$

0

$$(m+1)(m^2+4\,m+5)=0$$

$$m+1=0 \quad \rightarrow \quad m_1=-1$$

$$m^2+4\,m+5=0 \quad \rightarrow$$

$$m_{2,3}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$m_{2,3}=\frac{-4\pm\sqrt{16-20}}{2}=-2\pm i$$

$$y_c=c_1\,e^{mx}+e^{Px}(c_2\cos qx+c_3\sin qx)$$

$$y_c=c_1\,e^{-x}+e^{-2x}(c_2\cos x+c_3\sin x)$$

$$Let\;\;Y=A\,e^{2x}$$

$$\acute{Y}=2A\,e^{2x}$$

$$\acute{\acute{Y}}=4A\,e^{2x}$$

$$\acute{\acute{\acute{Y}}}=8A\,e^{2x}$$

$$8A\,e^{2x}+20A\,e^{2x}+18A\,e^{2x}+5A\,e^{2x}=3\,e^{2x}$$

$$51A\,e^{2x}=3\,e^{2x} \quad \rightarrow \quad A=\frac{3}{51}$$

$$Y=\frac{3}{51}\,e^{2x}$$

$\therefore$ The general solution: $\quad y=c_1\,e^{-x}+e^{-2x}(c_2\cos x+c_3\sin x)+\dfrac{3}{51}\,e^{2x}$

Example (2): Find the complete solution of the differential equation:

$$\boldsymbol{(D^4+8D^2+16)y=-\sin x}$$

Solve:

$$m^4+8m^2+16=0$$

$$(m^2+4)(m^2+4)=0 \quad \rightarrow$$

$$m^2+4=0 \quad \rightarrow \quad m^2=-4$$

$$m_{1,2}=\pm 2i$$

$m^2 + 4 = 0 \quad \rightarrow \quad m^2 = -4$

$m_{3,4} = \pm 2i$

$y_{c1} = e^{Px}(c_1 \cos qx + c_2 \sin qx) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$

$y_{c2} = e^{Px}(c_3 \cos qx + c_4 \sin qx) = c_3 x \cos 2x + c_4 x \sin 2x$

$y_c = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + c_3 x \cos 2x + c_4 x \sin 2x$

$Let \;\; Y = A \sin x + B \cos x$

$\acute{Y} = A \cos x - B \sin x$

$\acute{\acute{Y}} = -A \sin x - B \cos x$

$\acute{\acute{\acute{Y}}} = -A \cos x + B \sin x$

$\acute{\acute{\acute{\acute{Y}}}} = A \sin x + B \cos x$

$A \sin x + B \cos x + 8(-A \sin x - B \cos x) + 16(A \sin x + B \cos x) = -\sin x$

$9A \;\sin x + 9B \cos x = -\sin x \quad \rightarrow \quad A = -\frac{1}{9}, \quad B = 0$

$Y = -\frac{1}{9} \sin x$

$y = y_c + Y$

$\therefore$ The general solution: $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + c_3 x \cos 2x + c_4 x \sin 2x - \frac{1}{9} \sin x$

H.W: Find the complete solution of the differential equation:

1) $\acute{\acute{\acute{y}}} - 2\acute{\acute{y}} - 3\,\acute{y} + 10y = 40 \;\cos x\,, \quad let\; m = -2$

Ans: $y = c_1 e^{-2x} + e^{2x}(c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x) + 3\;\cos x - \sin x$

2) $(D^4 + 8D^2 - 9)y = \; 9x^2$

Ans: $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 \cos 3x + c_4 \sin 3x + x^2 + 16/9$