إذا طلب في السؤال **حل المعادلة التفاضلية المتجانسة من الرتبة الثانية** (second order) ولم يعطيك أحد الحلول كما في الطريقة السابقة فنتبع الخطوات التالية للحل:

1. تحويل المعادلة التفاضلية بصيغة المعادلة المميزة كما يلي:

$$a\acute{\acute{y}} + b\acute{y} + cy = 0$$

$Let\ y = e^{mx}\ ,\quad \therefore \acute{y} = me^{mx},\quad \acute{\acute{y}} = m^2e^{mx}$ sub. in above equation

$$a\,m^2e^{mx} + b\,me^{mx} + c\,e^{mx} = 0$$

$$e^{mx}(a\,m^2 + b\,m + c\,) = 0$$

$\therefore\ a\,m^2 + b\,m + c = 0$ is called characteristic equation المعادلة المميزة

2. حل المعادلة المميزة بقانون الدستور وبالحالات التالية:

$$m_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- إذا كانت الكمية تحت الجذر أكبر من الصفر (قيم موجبة) فقيم ال m ستكون قيم حقيقية وبذلك يكون الحل عبارة عن:

$$y = c_1\,e^{m_1x} + c_2\,e^{m_2x}$$

where:

$$m_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\ ,\qquad m_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- اذا كانت الكمية تحت الجذر تساوي صفر فان $m_1 = m_2 = m$ وبذلك يكون الطرفين متشابهين فيضرب احدهما ب x فيكون الحل عبارة عن:

$$y = c_1\,e^{mx} + c_2\,x\,e^{m\,x}$$

where:

$$m = \frac{-b}{2a}$$

- عندما تكون الكمية تحت الجذر أصغر من الصفر (كمية سالبة) فقيم ال m ستكون قيم خيالية وبذلك يكون الحل عبارة عن:

$$m_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad i=\sqrt{-1}$$

$$\therefore m_{1,2}=P\pm qi$$

$$y=e^{Px}(A\cos qx+B\sin qx)$$

where:

$$P=\frac{-b}{2a},\quad q=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Example (2): Find the general solution for following differential equation:

1) $\acute{\acute{y}}+7\,\acute{y}+12y=0$
2) $\acute{\acute{y}}-6\,\acute{y}+9y=0$
3) $\acute{\acute{y}}+2\,\acute{y}+5y=0$
4) $\acute{\acute{y}}-4y=0$

Solve:

1) $\acute{\acute{y}}+7\,\acute{y}+12y=0$

$$m^2+7\,m+12=0$$

$$m_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\left[m_{1,2}=\frac{-7\pm\sqrt{7^2-4\times1\times12}}{2\times1}=\frac{-7\pm1}{2}\right]\quad\rightarrow m_1=-3\,,\qquad m_2=-4$$

$$y=c_1\,e^{m_1x}+c_2\,e^{m_2x}$$

$$y=c_1\,e^{-3x}+c_2\,e^{-4\,x}$$

2) $\acute{\acute{y}}-6\,\acute{y}+9y=0$

$$m^2-6\,m+9=0$$

$$m_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\left[m_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{(-6)^2-4\times1\times9}}{2\times1}=\frac{6+\sqrt{0}}{2}\right]\quad\rightarrow m_1=m_2=m=3$$

$$y=c_1\,e^{mx}+c_2\,x\,e^{m\,x}$$

$$y=c_1\,e^{3x}+c_2\,x\,e^{3\,x}$$

3) $\boldsymbol{\acute{\acute{y}}+2\,\acute{y}+5y=0}$

$$m^2+2\,m+5=0$$

$$m_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$m_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{(2)^2-4\times1\times5}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{-16}}{2}=\frac{-2\pm4\sqrt{-1}}{2}=-1\pm2i$$

$$=P\pm qi$$

$$\therefore P=-1,\quad q=2$$

$$\therefore y=e^{Px}(A\cos qx+B\sin qx)=e^{-x}(A\cos2x+B\sin2x)$$

4) $\boldsymbol{\acute{\acute{y}}-4y=0}$

$$m^2-4=0\quad\rightarrow\quad m^2=4$$

$$m_{1,2}=\pm2$$

or

$$m_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{0\pm\sqrt{0-4\times1\times-4}}{2\times1}=\pm2$$

$$y=c_1\,e^{2x}+c_2\,e^{-2\,x}$$

Problems:

H.W: Find the general solution for following differential equation:

1) $\boldsymbol{\acute{\acute{y}}-3\,\acute{y}+2y=0}$

$\boldsymbol{Ans}$: $y=c_1\,e^{2x}+c_2\,e^{\,x}$

2) $\boldsymbol{\acute{\acute{y}}-5y=0}$

$\boldsymbol{Ans}$: $y=c_1\,e^{\sqrt{5}x}+c_2\,e^{-\sqrt{5}x}$