Analytic Mechanics

Fifth lecture

Force as a function of a particle

Dr. Nasma Adnan Jaber

Second Stage

Department of medical physics

Al-Mustaqbal University-College

2020- 2021

1- The force as a function of Position (The concepts of kinetic and potential energys) (١)

القوة كدالة للوضع (مفهوم الطاقتين الحركية واللاحقة)

* The effect of force depends on the Particle's <u>position</u> with respect to other bodies

* يعتمد تأثير القوة على الجسم على موضعه فقط بالنسبة الى الاجسام الاخرى

* The differential equation for rectilinear motion is given by:-

* المعادلة التفاضلية للقوة في الحركة على خط مستقيم

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2} = m\ddot{x} \quad \text{—— (1)}$$

$$\therefore \boxed{\vec{F} = m\ddot{x}} \quad \text{—— (1)}$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = v$$

وحيل المشتقة

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} \Big\} \frac{dx}{dx} \Rightarrow \ddot{x} = \frac{dx}{dt}\frac{d\dot{x}}{dx} = v\frac{dv}{dx}$$

$$\therefore \boxed{\ddot{x} = v\frac{dv}{dx}} \quad \text{—— (2)}$$

by substituting ② in ①

$$\vec{F}(x) = mv\frac{dv}{dx} \Longrightarrow F(x) = \frac{m}{2}\frac{dv^2}{dx} = \frac{dT}{dx}$$

* The force as a function of position is derivative of kinetic energy

* ان القوة كدالة للموضع هي مشتقة الطاقة الحركية فالمعادلة التفاضلية للحركة من هذه الحالة

$$F(x) = \frac{dT}{dx} \quad \text{---- ③}$$

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \quad \text{---- ④}$$ Kinetic energy of the particle

الطاقة الحركية للجسيمة

* الطاقة الحركية هي الطاقة التي يمتلكها الجسم نتيجة لحركته وتعتمد على كتلة الجسم وسرعته ووحدتها هي $T = Kg \cdot m^2/s^2$

* express eq ③ in integral form ③ نأخذ التكامل للمعادلة

$$W = \int_{x_0}^{x} F(x)\,dx = \int_{T_0}^{T} dT = T - T_0 \quad \text{---- ⑤}$$

The work done on the particle الشغل المنجز على الجسم

* The work is equal to the change in the kinetic

* let us define a function V(x) potential energy (3*)

$$-\frac{dV}{dx} = F(x) \quad \text{---} \quad (6)$$

الطاقة الكامنة هي الطاقة المخزونة لجسم ما في حالة السكون

The work integral is

$$W = \int_{x_0}^{x} F(x)\,dx = -\int_{x_0}^{x} dV = -V(x) + V(x_0) = T - T_0$$

$$\therefore \quad T + V = \frac{1}{2}mv^2 + V(x) = E \quad \text{--- Total energy}$$

* It is equal to the sum of the kinetic and potential energy and is constant throughout the motion of particle, the force in this case is said to be conservative

* اذا كانت القوة المؤثرة دالة للموضع فقط والحركة على خط مستقيم فإن مجموع الطاقة الحركية والكامنة يبقى ثابتاً خلال الحركة وتسمى القوى في هذه الحالة القوة المحافظة او القوة الغير محافظة اي التي لا تتواجد لها دالة كامنة فتكون اعتيادياً من النوع البديد مثل الاحتكاك

∴ The motion of particle can be obtained by solveing the energy equation

$$\frac{1}{2} m v^2 = E - V(x) \Rightarrow v^2 = \frac{2}{m}\left[E - V(x)\right]$$

سرعة الجسيمة

$$\boxed{v = \mp \sqrt{\frac{2}{m}\left[E - V(x)\right]}}$$

Example:- The motion of a freely falling body is an example of conservative motion مثال الحركة المحافظة هي سقوط الجسم الحر

If we choose the x direction to be positive upword then the gravitational force is equal to $-mg$

ان حركة الجسم الحر الساقط الحالة التي تكون فيها القوة الثابتة هي مثال خاصة الحركة المحافظة اذا اخترنا اتجاه x موجبا الى الاعلى فان قوة جذب الارض $-mg$

∴ The potential energy

$$-\frac{dv}{dx} = -mg \Rightarrow dv = \int mg\, dx$$

$$\therefore\ V = mgx + c$$

c is constant and c equal $c = 0$ when $x = 0$, $v = 0$

$$E = T + V \Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{2} m v^2 + mgx} \quad \text{--- (1)}$$

* The body projected upword with initial speed v_0 from the origin $x = 0$

$$E = \frac{1}{2} m V_o^2 \quad \text{---------- (2)}$$

eq ① and eq ② $\quad \frac{1}{2} m V^2 + mgx = \frac{1}{2} m V_o^2 \;) \times 2$

$$V^2 = V_o^2 - 2gx \quad \text{---- (3)}$$

The maximum height is given by $V = 0$

$$0 = V_o^2 - 2gx_{max}$$

$$x_{max} = \frac{V_o^2}{2g} \quad \text{---- maximam height}$$

Newton's Law of gravity:- The force of gravity between two particles is directly proportional to the product of their masses and inversely proportional to the square of distance between them

* قانون الجذب العام او قانون نيوتن للجذب ينص على ان قوة التجاذب بين اي جسمين تتناسب طرديا مع حاصل ضرب كتلتيهما وعكسيا مع مربع المسافة بين مركزيهما

* The gravitational force that the earth exerts on body of mass m is given by $F = -\frac{GMm}{r^2}$

where G is Newton's constant of gravitation (5)

M is the mass of earth كتلة الارض

r is the distance from the center of earth to the body المسافة بين مركز الارض والجسم

The force $F = -mg$

* when body is at the surface of earth

$$\therefore +mg = +G\frac{Mm}{r^2}$$

$$\therefore \boxed{g = \frac{GM}{r_e^2}} \rightarrow \text{is the acceleration of gravity at the earth's surface}$$

r_e is the radius of earth نصف قطر الارض