Republic of Iraq

Ministry of Higher Education

and Scientific Research

Al-Mustaqbal University College

Computer Engineering Techniques Department

Subject: Fundamentals of Electrical Engineering

First Class

Lecture Ten

By

Dr. Jaber Ghaib

MSc. Sarah Abbas

الاعداد المركبة (Complex Numbers)

العدد المركب هو العدد الذي يككون بصيغة (a+jb) حيث ان **a** يمثل عدد حقيقي (Real Number) و **jb** عدد تخيلي (Imaginary number).

$$j = \sqrt{-1} \qquad , \qquad j^2 = -1$$

الاعداد المركبه يتم استخدامها بصورة واسعه في تحليل الدوائر الكهربائية ذات الربط التوالي, التوازي والتوالي توازي. ان الفائدة من استخدام الاعداد المركبه هي تسهيل التعامل الرياضي مع الدوائر الكهربائية بصورة جبريه.

في الدوائر الكهربائية, هنالك فرق طور 90^0 يضهر بين الفواتية والتيار وذلك مع المتسعه والمحاثة الصرف; وهذا هو المفتاح لمعرفه لماذا نستخدم j بصوره كبير في تحليل الدوائر الكهربائية.

العمليات الرياضية للاعداد المركبة

(١) عملية الجمع والطرح

$$(a + jb) + (c + jd) = (a + c) + j(b + d)$$

$$(a + jb) - (c + jd) = (a - c) + j(b - d)$$

ولذلك لجمع العددين المركبين $(3 + j2)$ و $(2 - j4)$

$$(3 + j2) + (2 - j4) = 3 + j2 + 2 - j4$$

$$(3 + 2) + j(2 - 4) = 5 - j2$$

و لطرح العددين المركبين $(3 + j2)$ و $(2 - j4)$

$$(3 + j2) - (2 - j4) = 3 + j2 - 2 + j4$$

$$(3 - 2) + j(2 + 4) = 1 + j6$$

(٢) عملية الضرب

$$(a + jb)(c + jd) = ac + a(jd) + (jb)c + (jb)(jd)$$

$$= ac + jad + jbc + j^2bd$$

ولكن قيمة $j^2 = -1$ و لذلك

$$(a + jb)(c + jd) = ac + jad + jbc - bd$$

$$= (ac - bd) + j(ad + bc)$$

Example 1: determine the value of $(2 - j3)(3 - j5)$

Sol: $(2 - j3)(3 - j5) = 2 \times 3 + 2 \times (-j5) + (-j3) \times 3 + (-j3) \times (-j5)$

$$= 6 - j10 - j9 + j^2 15$$

$$= 6 - j10 - j9 - 15 = (6 - 15) + j(-10 - 9)$$

$$= -9 - 19j$$

(٣) مرافق العدد المركب (complex conjugate)

العدد المرافق للعدد $(\mathbf{a+jb})$ هو $(\mathbf{a-jb})$. مثال على ذلك العدد المرافق لل $(3-j2)$ هو $(3+j2)$. ناتج ضرب العدد المركب ومرافقه هو دائماً مايكون عدد حقيقي, وهذه خاصيه مهمه تستخدم عند قسمة الاعداد المركبه.

لذلك

$$(a+jb)(a-jb) = a^2 + a(-jb) + (jb)a + (jb)(-jb)$$

$$= a^2 - jab + jab - j^2b^2$$

$$= a^2 - (-1)b^2 = a^2 + b^2$$

For Example $(1+j2)(1-j2) = 1^2 + 2^2 = 5$

$$(3-j4)(3+j4) = 3^2 + 4^2 = 25$$

(٤) عملية القسمة

ان عملية قسمة عدد مركب على عدد مركب اخر بصيغة $(a+jb)$ تمم عن طريق ضرب كل من البسط والمقام بمرافق العدد المركب للمقام. حيث ان هذه العمليه تساعد على جعل المقام عدد حقيقي.

مثال على ذلك

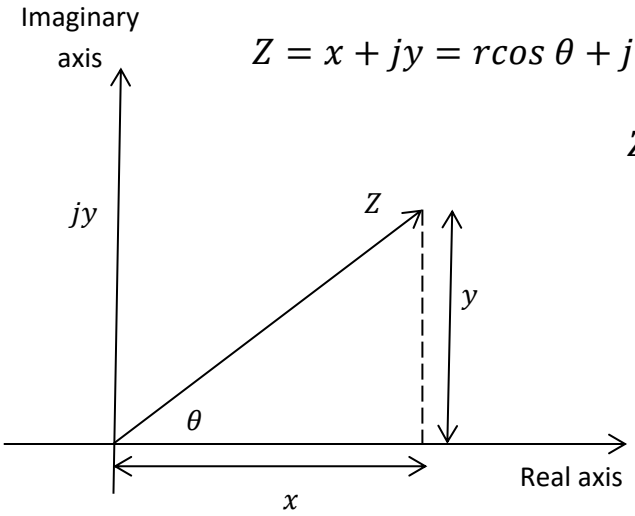
$$\frac{2+j4}{3-j4} = \frac{2+j4}{3-j4} \times \frac{3+j4}{3+j4} = \frac{6+j8+j12+j^2 16}{3^2+4^2}$$

$$= \frac{6+j8+j12-16}{25}$$

$$= \frac{-10 + j20}{25}$$

$$= -\frac{10}{25} + j\frac{20}{25} = -0.4 + j\,0.8$$

الصيغة القطبية للعدد المركب (The Polar Form)



في الشكل $Z = x + jy = r\cos\theta + j\sin\theta = r(\cos\theta + j\sin\theta)$

الصيغة القطبية لعدد المركب هي $Z = r\angle\theta$

$$|Z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \arctan\frac{y}{x}$$

(1) **عملية الضرب**

$$(r_1\angle\theta_1)(r_2\angle\theta_2) = r_1 r_2\angle(\theta_1 + \theta_2)$$

(2) **عملية القسمة**

$$\frac{(r_1\angle\theta_1)}{(r_2\angle\theta_2)} = \frac{r_1}{r_2}\angle(\theta_1 - \theta_2)$$

دوائر المقاومة, المحاثة و المتسعه (RLC circuit)

في الدوائر الكهربائية التي تتكون من المقاومة, المحاثة والمتسعه وللغرض ايجاد الممانعه الكلية للدائره فان قيم الكلية للممانعه هي على شكل عدد مركب. ان قيمة المقاومة تمثل الجزي الحقيقي للعدد المركب, في حين ان الرادة الحثية والسعويه تكون الجزء التخيلي من العدد المركب وبذلك فان الممانعه

اذا كانت الخواص حثية

$$Z = R + jX_L - jX_C$$

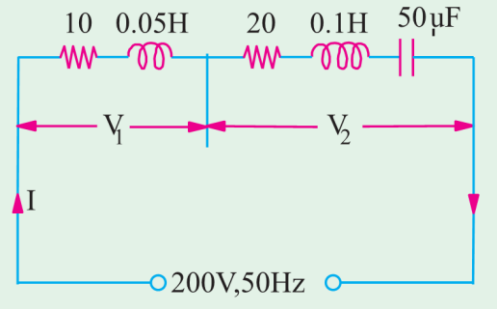
$$Z = R + j(X_L - X_C)$$

اذا كانت الخواص سعويه

$$Z = R + j(X_C - X_L)$$

Type of Impedance	Value of Impedance	Phase angle for current	Power factor
Resistance only	R	0°	1
Inductance only	ωL	90° lag	0
Capacitance only	$1/\omega C$	90° lead	0
Resistance and Inductance	$\sqrt{[R^2 + (\omega L)^2]}$	$0 < \phi < 90°$ lag	1 > p.f. > 0 lag
Resistance and Capacitance	$\sqrt{[R^2 + (-1/\omega C)^2]}$	$0 < \phi < 90°$ lead	1 > p.f. > 0 lead
R-L-C	$\sqrt{[R^2 + (\omega L \sim 1/\omega C)^2]}$	between 0° and 90° lag or lead	between 0 and unity lag or lead

Example 2: calculate the value of the toatl impedance in the circuit shown below and the current I in complex and polar form.



Solution:

$$X_{L1} = 2\pi \times 50 \times 0.05 = 15.71\ \Omega$$

$$X_{L2} = 2\pi \times 50 \times 0.1 = 31.42\ \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314 \times 50 \times 10^{-6}} = 63.7\ \Omega$$

$$Z = R_1 + jX_{L1} + R_2 + jX_{L2} - jX_C$$

$$Z = 10 + j15.71 + 20 + j31.42 - 63.7$$

$$Z = 30 - j16.57\ \ \Omega$$

$$|Z| = \sqrt{(30)^2 + (-16.57)^2} = 34.3\ \Omega$$

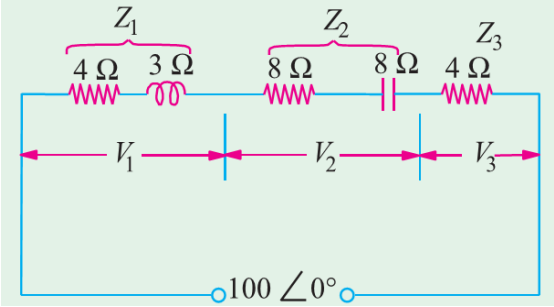
$$\theta = tan^{-1}\left(-\frac{16.57}{30}\right) = -28.91^o$$

$$Z = 34.3\angle -28.91\ \ \Omega$$

(i)

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{200}{34.3\angle -28.91} = 5.83\angle 28.91\ \ A$$

Example 3: for the circuit below, calculate **(i)** current **(ii)** voltage drops V1, V2, and V3



Solution

$$\mathbf{Z_1} = (4 + j3)\ \Omega;\ \mathbf{Z_2} = (6 - j8)\ \Omega;\ \mathbf{Z_3} = (4 + j0)\Omega$$

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z_1} + \mathbf{Z_2} + \mathbf{Z_3} = (4 + j3) + (6 - j8) + (4 + j0) = (14 - j5)\Omega$$

$$\mathbf{V} = \mathrm{V} \angle 0° = 100 \angle 0° = (100 + j0)$$

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{100}{(14 - 5j)} = \frac{100\ (14 + 5j)}{(14 - 5j)(14 + j5)} = 6.34 + j2.26$$

(*i*) Magnitude of the current

$$= \sqrt{(6.34^2 + 2.26^2)} = \mathbf{6.73\ A}$$

(*ii*) $\mathbf{V_1} = \mathbf{IZ_1} = (6.34 + j\ 2.26)\ (4 + j3) = 18.58 + j\ 28.06$

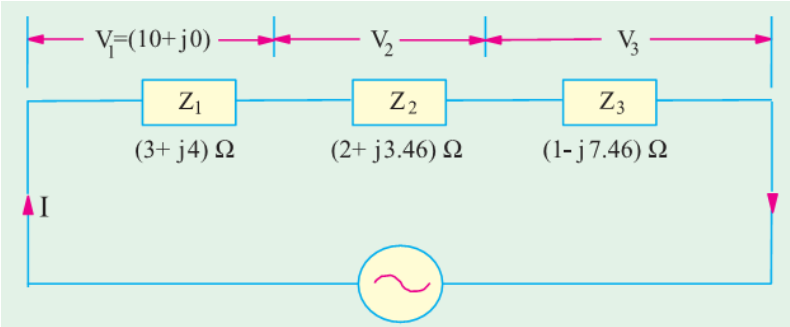
$\mathbf{V_2} = \mathbf{IZ_2} = (6.34 + j\ 2.26)\ (6 - j8) = 56.12 - j\ 37.16$

$\mathbf{V_3} = \mathbf{IZ_3} = (6.34 + j\ 2.26)\ (4 + j0) = 25.36 + j\ 9.04$

$\mathbf{V}\ = 100 + j\ 0$ (check)

Example 4: In a circuit, the applied voltage is found to lag the current by 30°. **(a)** Is the power factor lagging or leading ? **(b)** What is the value of the power factor ? (c) Is the circuit inductive or capacitive ?

In the diagram of Fig below, the voltage drop across Z1 is (10 + j0) volts. Find out **(i)** the current in the circuit **(ii)** the voltage drops across Z2 and Z3 **(iii)** the voltage of the generator.



Solution

(*a*) Power factor is ***leading*** because current leads the voltage.

(*b*) p.f. = cos 30° = **0.86 (lead)** **(*c*)** The circuit is **capacitive.**

(*i*) Circuit current can be found by dividing voltage drop $\mathbf{V_1}$ by $\mathbf{Z_1}$

$$\mathbf{I} = \frac{10 + j\,0}{3 + j\,4} = \frac{10\angle 0°}{5\angle 53.1°} = 2\angle -53.1° = 2(\cos 53.1° - j\sin 53.1°)$$

$$= 2\,(0.6 - j\,0.8) = 1.2 - j\,1.6$$

$$\mathbf{Z_2} = 2 + j\,3.46;\ \mathbf{V_2 = IZ_2} = (1.2 - j\,1.6)\,(2 + j3.46) = (7.936 + j\,0.952) \text{ volt}$$

$$\mathbf{V_3} = (1.2 - j\,1.6)\,(1 - j\,7.46) = (-10.74 - j\,10.55) \text{ volt}$$

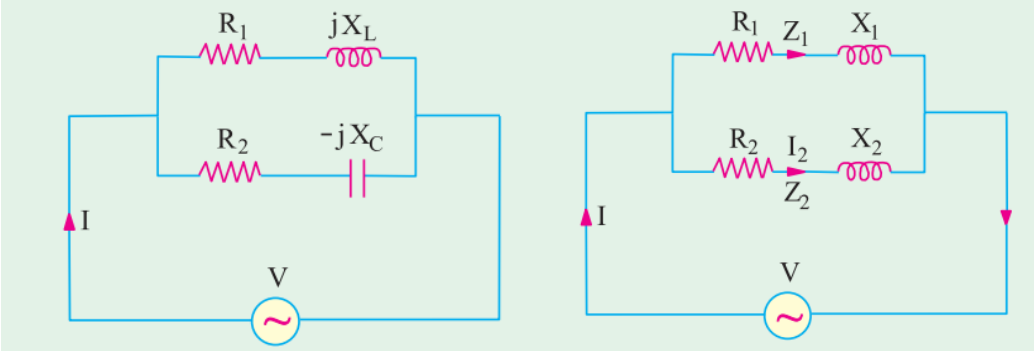
(*ii*)

$$\mathbf{V} = \mathbf{V_1} + \mathbf{V_2} + \mathbf{V_3} = (10 + j\,0) + (7.936 + j\,0.952) + (-10.74 - j\,10.55)$$

$$= (7.2 - j\,9.6) = 12\angle -53.1°$$

دوائر التوازي (Parallel Circuit)

الدائر في الشكل ادناه تتكون من ممانعتين Z_1 و Z_2 مربوطتين على التوازي خلال مصدر الفولتية نفسه



هنا

$$I_1 = \frac{V}{Z_1} \quad , \quad I_2 = \frac{V}{Z_2}$$

التيار الكلي

$$I = I_1 + I_2 = \frac{V}{Z_1} + \frac{V}{Z_2} = V\left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}\right) = V(Y_1 + Y_2) = VY$$

حيث ان Y تمثل total Admittance

Example 5: Two cicuits, the impedance of which are given by $Z_1 = 10 + j\,15$ and $Z_2 = 6 - j\,8$ ohm are connected in parallel. If the total current supplied is 15A, what is the value of current in each branch?

Sol:

$$\mathbf{I} = 15\ \angle 0^\circ\ ;\ \mathbf{Z_1} = 10 + j15 = 18\ \angle 57^\circ$$

$$\mathbf{Z_2} = 6 - j8 = 10\ \angle -53.1^\circ$$

$$\text{Total impedance, } \mathbf{Z} = \frac{\mathbf{Z_1 Z_2}}{\mathbf{Z_1 + Z_2}} = \frac{(10 + j15)(6 - j8)}{16 + j7}$$

$$= 9.67 - j3.6 = 10.3 \angle -20.4^\circ$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{IZ} = 15 \angle 0^\circ \times 10.3 \angle 20.4^\circ = 154.4 \angle 20.4^\circ$$

$$\mathbf{I_1} = \mathbf{V/Z_1} = 154.5 \angle 20.4^\circ / 18 \angle 57^\circ = 8.58 \angle 77.4^\circ$$

$$\mathbf{I_2} = \mathbf{V/Z_2} = 154.5 \angle 20.4^\circ / 10 \angle 53.1^\circ$$

$$= 15.45 \angle 32.7^\circ$$

Example 6:Two impedance $Z_1 = 8 + j\,6$ and $Z_2 = 3 - j\,4$ ohm are in parallel. If the total current of the combination is 25A, find the current taken by each branch?

Sol:

Solution. $Z_1 = (8 + j6) = 10 \angle 36.87^\circ$; $Z_2 = (3 - j4) = 5 \angle -53.1^\circ$

$$Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{(10 \angle 36.87^\circ)(5 \angle -53.1^\circ)}{(8 + j6) + (3 - j4)} = \frac{50 \angle -16.23^\circ}{11 + j2} = \frac{50 \angle -16.23^\circ}{11.18 \angle 10.3^\circ} = 4.47 \angle 26.53^\circ$$

Let $I = 25 \angle 0^\circ$; $V = IZ = 25 \angle 0^\circ \times 4.47 \angle 26.53^\circ = 111.75 \angle 26.53^\circ$

$$I_1 = V/Z_1 = 111.75 \angle 26.53^\circ / 10 \angle 36.87^\circ = 11.175 \angle 63.4^\circ$$

$$I_2 = 111.75 \angle 26.53/5 \angle 53.1^\circ = 22.35 \angle 26.57^\circ$$