الفصل الاول

المصفوفـــــات *Matrices*

تعريف المصفوفة:

المصفوفة عبارة عن مجموعة من الأعداد أو الرموز منظمة على شكل مربع أو مستطيل، ومرتبة في صفوف واعمدة، وتكون محصورة بين قوسين كبيرين. والشكل العام للمصفوفة هي:-

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

حيث أن:
n : تُمثل عدد الأعمدة
m : تُمثّل عدد الصفوف

يرمز لأي عنصر في المصفوفة بشكل عام بالرمز $a_{i\ j}$ حيث ان :

a : يمثل قيمة العنصر

i : تسلسل الصف الذي يقع فيه العنصر a ، وان i=1,2,….,m

j : تسلسل العمود الذي يقع فيه العنصر a ، وان j=1,2,….,n

مثـــال/

$$B_{2\times3} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad C_{2\times2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$D_{1\times4} = [3 \quad 4 \quad 2 \quad 0.5]$$

سعة المصفوفة *Size of Matrices*:

يُحدد حجم المصفوفة بعدد الأعمدة وعدد الأسطر، وتوصف كل مصفوفة ذات (m) صف و(n) عمود، بأنها من الدرجة $(m \times n)$.

حيث أنَّ:

حجم المصفوفة = عدد الصفوف × عدد الأعمدة

مثـــال/

ذات حجم 2×3 $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 16 \\ 5 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

ذات حجم 3×2 $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$

من الواضح أنَّ المصفوفة يمكن اعتبارها مجموعة من الصفوف أو مجموعة من الأعمدة، وبالعكس، فإن المتجه (***vector***) يمكن اعتبارهُ مصفوفة ذات صف واحد، ويُسمى متجه صفي (***Row vector***) أو متجه أفقي، مثلاً:-

$$[1 \quad -1 \quad 3]_{1\times 3}$$

أو ذات عمود واحد أو متجه عمودي أو رأسي (***Column vector***) مثلاً:-

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

أنواع خاصة من المصفوفات ***Special type of Matrix***:-

يوجد هناك عدد من المصفوفات ذات أهمية خاصة في التطبيقات الرياضية منها:-

1- المصفوفة المربعة ***Square Matrix***:-

إذا كان عدد الصفوف مساوي الى عدد الأعمدة أي أنَّ $(m = n)$ فإن المصفوفة تكون مربعة:

مثـال/

$$\mathbf{A}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{B}_{3\times 3} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ g & d & \mathrm{f} \\ e & k & h \end{bmatrix}$$

تعريف القطر الرئيسي ***Main Diagonal***:

القطر الرئيسي للمصفوفة المربعة $(n \times n)$ هو ذلك القطر الذي يبدأ بالعنصر (a_{11}) وينتهي بالعنصر (a_{nn})، وعناصر القطر الرئيسي هي $(a_{11}\ ,\ a_{22}\ ,\ \ldots\ ,\ a_{nn})$

أي أنَّ عناصر القطر الرئيسي هي $(aij\ ,\ \forall i = j)$.

2- مصفوفة الوحدة ***Identity Matrix***:-

هي مصفوفة مربعة، يكون كل عنصر من عناصرها لهُ قيمة **الصفر** عدا العناصر الواقعة على القطر الرئيسي التي لها قيمة **الواحد** الصحيح، ويرمز لها بالرمز $\mathbf{I}_n$.

مثـــال/

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3- المصفوفة الصفرية *Zero Matrix* :-

هي المصفوفة التي تكون كافة عناصرها قيمتها (**صفر**) ويرمز لها بالرمز $O_{m\times n}$.

مثـــال/

$$O_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad O_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4- المصفوفة الصفية والعمودية *Row, Column Matrix*:-

المصفوفة الصفية، ويُطلق عليها أيضاً المُتجه الأفقي (***Row vector***) وهي المصفوفة التي تحتوي على صف واحد وأكثر من عمود وتُكتب بالشكل ($1\times n$)

مثـــال/

$$[3 \quad 4 \quad 2 \quad 0.5]$$

هو متجه صفي ذا حجم 1×4

إما المصفوفة العمودية ويُطلق عليها ايضاً المُتجه العمودي أو الرأسي (***Column vector***)، وهي المصفوفة التي تحتوي على عمود واحد فقط ، وأكثر من صف. وتُكتب بالشكل ($m\times 1$)

مثـــال/

$$\begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

هو متجه عمودي ذو حجم 1 × 4

5- المصفوفة القطرية *Diagonal Matrix*:-

وهي مصفوفة **مُربعة** ، جميع عناصرها التي لا تقع على القطر الرئيسي، تأخذ قيمة **الصفر**.

مثـــال/

$$D_{3*3} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

حيث نُلاحظ أنَّ هذه المصفوفة مربعة (3×3) قد أخذت عناصرها قيم صفرية عدا القطر الرئيسي.

$$a_{11} = 4 \quad , a_{22} = -1 \quad , a_{33} = 3$$

أي أنَّ:

$$aij = 0 \quad \text{if} \quad i \neq j$$
$$aij \neq 0 \quad \text{if} \quad i = j$$

6- المصفوفة المثلثية العليا *Upper triangular Matrix*:-

يُقال للمصفوفة التي يكون عناصر قطرها وما فوق أعداد، في حين أنَّ العناصر التي تقع تحت القطر الرئيسي لها قيمة **الصفر** ، بأنها مصفوفة مثلثية عليا.

مثـــال/

$$A_{4\times4} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 & 7 \\ 0 & 4 & 8 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

أي أنَّ:

$$aij = 0 \quad \text{if} \quad i > j$$
$$aij \neq 0 \quad \text{if} \quad i \leq j$$

7- المصفوفة المثلثية السفلى *Lower triangular*:-

يُقال للمصفوفة التي يكون عناصر قطرها الرئيسي وما تحتهُ أعداد، في حين أنَّ العناصر التي تقع فوق القطر الرئيسي لها قيمة **الصفر**، مصفوفة مثلثية سفلى.

كما في الشكل التالي:-

$$A_{4\times4} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & -3 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

أي أنَّ:

$$aij = 0 \quad \text{if} \quad i < j$$

$$aij \neq 0 \quad \text{if} \quad i \geq j$$

تساوي المصفوفات:-

يُقال للمصفوفات **A** و **B** بأنهما متساويتان، إذا كان لهما نفس السعة، وتساوت عناصرهما ذوات المواقع المتناظرة.

مثـال/

$$\mathbf{A}_{2*3} = \begin{bmatrix} 1+1 & 5-2 & \frac{10}{2} \\ 2+1 & 5+2 & 4-5 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{B}_{2*3} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

نُلاحظ أن كل من **B** و **A** ذات سعة **(2×3)**.

كذلك تساوي العناصر المتناظرة لمصفوفتين حيث أن:

$a_{11} = 1+1$ مساوي الى $b_{11} = 2$

$a_{13} = \frac{10}{2}$ مساوي الى $b_{13} = 5$

⋮

وهكذا لبقية العناصر

مثـال/ المصفوفتان **B** و **A** غير متساويتان:-

$$\mathbf{A}_{3\times3} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 7 \\ 1 & -3 & 9 \end{bmatrix} \neq \mathbf{B}_{3\times3} = \begin{bmatrix} -1 & 54 & 4 \\ 2 & 6 & 7 \\ 1 & -3 & 9 \end{bmatrix}$$

وذلك لأن العنصر a_{12} في المصفوفة **A** لا يُساوي العنصر b_{12} وهو **54** في المصفوفة **B**.

مثـال/

إذا كانت المصفوفتان A و B متساويتان فجد قيم y و X ؟

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & x \\ 0 & y \end{bmatrix}$$

الحـل/

بما أنَّ المصفوفتان متساويتان فإن عناصرهما المتناظرة تكون متشابهة حسب تعريف تساوي المصفوفات.

إذاً فإن:

$$x = 4 \quad , \quad y = -2$$

مثـــال/ جد سعة المصفوفة A وماهي قيمة كل من العناصر:

1) a_{32} 2) a_{25} 3) a_{35}

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 17 & 9 & -11 & 8 \\ 2 & 5 & 28 & 36 & 3 \\ 7 & -4 & -8 & 15 & 0 \end{bmatrix}_{3\times5}$$

الحـــل/ سعة المصفوفة هي (3×5)

وقيم العناصر المطلوبة هي:-

$a_{32} = -4$ **الصف الثالث، العمود الثاني.**

$a_{25} = 3$ **الصف الثاني، العمود الخامس.**

$a_{35} = 0$ **الصف الثالث، العمود الخامس.**

تمارين واجب

1- كوّن المصفوفة A = aij من الدرجة (2×3) حيث أنَّ:

$$aij = -i + 3j^2$$

2- جد قيم المجاهيل التي تجعل قيمة المساواة المعطاة صحيحة:

$$\begin{bmatrix} x+1 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x-3 & 4 \\ 4y+1 & 5 \end{bmatrix}$$

3- جد قيم a , b , c إذا كانت:-

$$\begin{bmatrix} 2 & a \\ 3 & 2b+1 \\ -5c & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -7 \\ 10 & 0 \end{bmatrix}$$